Combinatoria

Material de entrenamiento.

Principios de conteo.

PEDRO DAVID SÁNCHEZ SALAZAR
Universidad Autónoma de Yucatán

Octubre 2025

Contando de forma ordenada (Principio de la suma)

En esta sesión iniciaremos el trabajo con problemas relacionados con el conteo de objetos. Es común que en muchos problemas se pida a los participantes encontrar el número de formas de realizar un proceso, de seleccionar un objeto, de recorrer un camino, etc.

Para iniciar con estos problemas existen dos principios básicos, pero antes de ellos, podemos resumir la idea principal como sigue:

Contar de forma ordenada. En los problemas de conteo, tratar de listar todas las posibilidades "como se nos van ocurriendo" no suele ser una forma adecuada de enfrentar el problema, ya que es posible que estemos olvidando alguna posibilidad sin darnos cuenta, o que por error repitamos alguna. La mejor manera de proceder es siempre: *contar de forma ordenada*.

Al decir que hay que contar de forma ordenada, nos referimos a que hay que primero planear cómo realizaremos el conteo antes de proceder al conteo propiamente dicho.

Ilustremos esto con un ejemplo que apareció en el Examen Estatal de Primaria en el año 2019.

Problema. [2019PRIM] Didier escribe en la pizarra todos los números de tres cifras con la siguiente cualidad: Si multiplicas la cifra de las decenas con la de las unidades, obtienes la cifra de las centenas. ¿Cuántos números escribió Didier?

Solución. *Lo primero que intentamos es hacer una lista con todos los números que se nos puede ocurrir que tengan la propiedad. Sin embargo, es posible que nos equivoquemos, por que no estamos siguiendo ningún orden.*

Para evitar ese problema, vamos a trazar una estrategia o plan de conteo, pero para ello primero necesitamos razonar un poco el problema.

Como al multiplicar la cifra de las unidades con la de las decenas obtenemos la de las centenas, podemos ***organizar*** *los resultados dependiendo de cuál será la cifra de las centenas. Por ejemplo, podemos contar primero cuántos* *tienen la cifra de las centenas igual a 1, cuántos igual a 2, cuántos igual a 3, y así sucesivamente. El introducir orden nos permitirá tener la seguridad de haber encontrado todos los números y que no nos hará falta ninguno. Procedemos entonces al conteo.*

***Cuando la cifra de las centenas es 1**, la de las unidades y de las decenas también tienen que ser iguales a 1, por lo que sólo hay 1 posibilidad: 111.*

***Cuando la cifra de las centenas es 2,** la de las unidades y la de las decenas deben ser 1 y 2 en algún orden, por lo que hay 2 posibilidades: 221 y 212.*

***Cuando la cifra de las centenas es 3,** la de las unidades y la de las decenas deben ser 1 y 5 en algún orden, por lo que hay 2 posibilidades: 331 y 313.*

***Cuando la cifra de las centenas es 4**, la de las unidades y la de las decenas pueden ser 1 y 4 (e algún orden) pero también pueden ser 2 y 2. Entonces tenemos 3 posibilidades: 414, 441, 422.*

***Cuando la cifra de las centenas es 5**, la de las unidades y la de las decenas deben ser 1 y 5, en algún orden, por lo que hay 2 posibilidades: 515 y 551.*

***Cuando la cifra de las centenas es 6,** la de las unidades y la de las decenas pueden ser: 6 y 1, o 2 y 3 en algún orden. Aquí habrá 4 posibilidades: 616, 661, 623, 632.*

***Cuando la cifra de las centenas es 7,** la de las unidades y la de las decenas deben ser 1 y 7 en algún orden, por lo que hay 2 posibilidades: 717, 771.*

***Cuando la cifra de las centenas es 8**, la de las unidades y la de las decenas pueden ser: 1 y 8, o 2 y 4 en algún orden. Tenemos 4 posibilidades: 818, 881, 824, 842.*

***Cuando la cifra de las centenas es 9,** la de las unidades y la de las decenas pueden ser 1 y 9, o 3 y 3. Tenemos entonces 3 posibilidades: 919, 991 y 933.*

Sumando las cantidades en cada tipo obtenemos el resultado final:

$$1 + 2 + 2 + 3 + 2 + 4 + 2 + 4 + 3 = 23.$$

Lo que queremos enfatizar es que, en vez de tratar de listar todas las posibilidades "conforme se van ocurriendo", se procedió con un plan antes de tratar de encontrar los números. No podemos repetirlo lo suficiente: **el**

secreto para trabajar con los problemas de conteo es proceder de forma ordenada, en vez de proceder prueba y error.

El problema anterior ilustra también el primer principio fundamental de conteo, que denominamos **principio de la suma**, el cual presentamos aquí.

Principio de la suma. Si al realizar una selección o proceso, tenemos diferentes casos o tipos en los que lo podemos realizar, el número total de formas de hacer la selección se obtiene sumando el número de formas en que se puede hacer cada caso por separado.

Así, en el problema de ejemplo, el proceso o selección era *encontrar el número de 3 cifras*. Pero esa selección la podíamos dividir en 9 diferentes casos, correspondientes a las 9 posibilidades para la cifra de las centenas. Por lo tanto, el total lo obtenemos sumando las cantidades que hubo en cada uno de los 9 casos.

Observación importante: para aplicar el principio de la suma es necesario que los casos no se traslapen. Por ejemplo, si nos piden contar cuántos números de 3 cifras tienen al menos 1 dígito par, no nos conviene dividirlo en los siguientes casos:

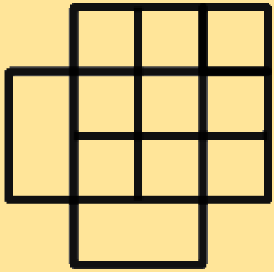
- Cuando tienen una cifra par en las unidades.
- Cuando tienen una cifra par en las decenas.
- Cuando tienen una cifra par en las centenas.

debido a que hay números como el 452 que aparecen en dos de los casos. Es decir, el primer y el tercer caso se traslapan, por lo que aquí **no es válido aplicar el principio de la suma** (habría que aplicar alguna otra estrategia de conteo).

En resumidas cuentas: la mejor estrategia para resolver problemas de conteo es dividir el problema en casos.

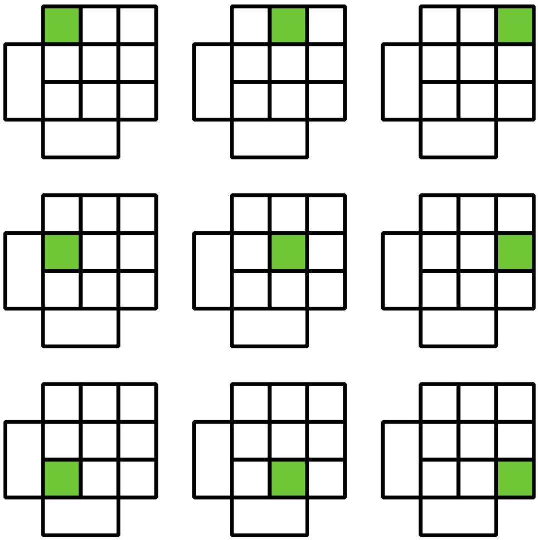
Veamos otro ejemplo

Problema. [2018PRIM] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura?

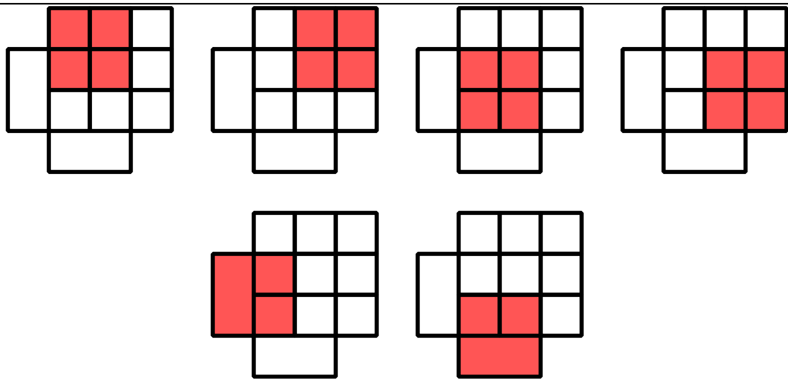


Solución. *Queremos proceder dividiendo por casos. Aquí, la división la haremos dependiendo del tamaño de los cuadrados.*

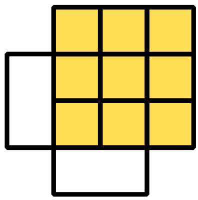
Cuadrados de 1×1. De este tipo hay 9, ilustrados en la siguiente figura.



Cuadrados de 2×2. *En este caso contamos 6 cuadrados:*



Cuadrados de 3×3. *Finalmente, en este caso hay solo 1 posibilidad.*



Observemos que los casos no se traslapan. Por lo tanto, el principio de la suma nos garantiza que habrá 9+6+1 = 16 cuadrados.

Tomando varias decisiones (Principio de la multiplicación)

Existe otro principio básico para problemas de conteo, que enunciamos a continuación.

Principio de la multiplicación. Si para realizar un proceso es necesario realizar una serie de decisiones independientes, entonces el número de maneras de realizar el proceso completo se calcula multiplicando el número de formas de realizar cada decisión.

La diferencia entre el principio de la suma y de la multiplicación la podemos describir como sigue:

- En el principio de la suma, hay que realizar una sola decisión, la cual se puede hacer entre varios casos, pero sólo uno de ellos a la vez.

- En el principio de la multiplicación hay que realizar varias decisiones, una después de otra.

Vamos a ver un ejemplo del principio de la multiplicación.

Problema. Jorge tiene 3 camisas, 4 pantalones y 2 pares de zapatos. ¿De cuántas formas puede elegir su vestuario?

> ***Solución.*** *Para elegir su vestuario necesita tomar 3 decisiones: (1) la camisa que vestirá, (2) el pantalón que se pondrá y (3) los zapatos que se pondrá. Cada elección es independiente (la elección de la camisa no afecta la elección del pantalón, ni éstos la de los zapatos).*
>
> *Por tanto, el número de maneras de elegir el vestuario se halla multiplicando el número de opciones para cada decisión, es decir, $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ formas.*

Un error muy común, sobre todo entre los que se inician en las técnicas de conteo, es querer aplicar siempre este principio, sin observar que para que se pueda utilizar es necesario que haya independencia en las elecciones.

Por ejemplo, el siguiente problema ***no*** puede resolverse aplicando directamente el principio de la multiplicación.

Problema. ¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 5 y no tienen cifras repetidas?

> ***<u>Solución incorrecta</u>.*** *La primera cifra (la de la izquierda) tiene 9 posibilidades, ya que puede ser cualquier número entre 1 y 9. La segunda cifra (la de en medio) tiene 9 posibilidades (porque, aunque no podemos repetir el que usamos en las centenas, ahora sí podemos usar el cero). La tercera cifra tiene 2 opciones (como el número es múltiplo de 5, debe terminar en 0 o en 5). Por tanto, hay $9 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ posibilidades.*
>
> *La solución es incorrecta debido a que las tres decisiones no son independientes: lo que se elige al principio afecta las posibles decisiones al final. Por ejemplo, si al principio se escoge 5, ya no habría 2 posibilidades al final pues tendría que ser el dígito 0. De esta manera, las elecciones iniciales influyen en las posteriores y por tanto no hay independencia.*

Nos preguntamos cómo se debe resolver un problema como éste, y la respuesta es que también se resuelve separando en casos.

Solución. *El dígito de las unidades debe ser 5 o 0 pues el número es múltiplo de 5, de modo que tenemos:*

- *Si el dígito de las unidades es 5, el de las centenas tiene 8 posibilidades (los números del 1 al 9 exceptuando al 5) y el de las decenas tiene 8 posibilidades (ahora se incluye al cero, pero no se pueden usar los dos ya escogidos). Como se tomaron 2 decisiones, en este caso hay 64 números posibles.*

- *Si el dígito de las unidades es 0, entonces el de las centenas tiene 9 posibilidades (cualquiera del 1 al 9) y el de las decenas tiene 8 posibilidades (cualquiera de los 10 dígitos exceptuando el 0 y el de las centenas). Por lo tanto de este tipo hay 9·8=72 números.*

Así, en total habrá 64+72 =136 números.

Es necesario aquí aclarar que, estrictamente hablando, la independencia se refiere a que cada decisión no altera la cantidad de opciones en las siguientes decisiones (no quiere decir que siempre tendremos exactamente las mismas opciones, únicamente que las cantidades son las mismas).

Para ilustrar este punto, consideremos el siguiente problema.

Problema. Alan, Bruno, César y Daniel juegan una carrera. Si no hay empates, ¿de cuántas formas pueden quedar ordenados los 4 lugares?

Solución. *Cada posible listado de los 4 lugares corresponde a 4 decisiones: (a) seleccionar quién ganó la carrera, (b) seleccionar quién quedó en segundo lugar, (c) seleccionar quién quedó en tercer lugar, y (d) seleccionar quién quedó al último.*

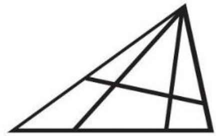
Para la primera decisión tenemos 4 opciones (puede ganar cualquiera de los 4 muchachos). Sin embargo, esta decisión, en sentido estricto, afecta la segunda decisión. Por ejemplo, si Bruno gana la carrera, la segunda decisión corresponde a escoger a un niño en (Alan, César, Daniel), mientras que, si Daniel gana la carrera, la segunda decisión se hará entre (Alan, Bruno, César).

Por tanto, la primera elección está afectando a las siguientes. Sin embargo, no importa cuál es la primera decisión, ***siempre habrá tres opciones para la segunda****, y no importa lo que decidas en la segunda,* ***siempre habrá dos opciones para la tercera****, y no importa a quién escojamos en tercer lugar,* ***siempre habrá sólo una opción para el último****.*

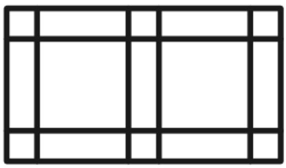
Como cada decisión ***no altera la cantidad de opciones disponibles*** *en las siguientes, sí podemos aplicar el principio de la multiplicación, concluyendo que hay 4·3·2·1=24 formas en que pueden quedar los resultados.*

Problemas resueltos (Principios básicos)

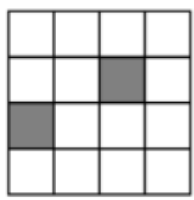
IMPORTANTE. Todos estos problemas pueden ser resueltos únicamente con los principios básicos (multiplicación y separación en casos). Sin embargo, el objetivo para este taller no es dar la respuesta numérica, ***sino realizar el proceso de solución con los principios básicos.***



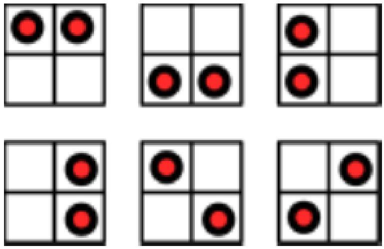
1. [PRIM2017] ¿Cuántos triángulos hay en la figura?
2. [PRIM2017] Las páginas de un libro están numeradas 1, 2, 3, …, 300. ¿Cuántas veces aparece en total el dígito 7 en los números de página? (Por ejemplo, en la página 177, el 7 aparece dos veces).
3. [PRIM2017] Fíjate que hay números de cuatro cifras como el 3854 y el 4835, que se forman usando sin repetir las cifras 3, 4, 5, 8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con el 3, 4, 5, 8?
4. [2019PRIM] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura completa? (los cuadrados grandes en el interior miden 3 cm en cada lado y los cuadrados pequeños de las esquinas miden 1 cm en cada lado).



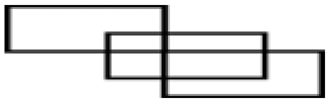
5. [2017PRIM] El password de la computadora de Luis está formado únicamente por vocales (A, E, I, O, U) y consta de 5 letras. Si la primera letra es E, la tercera letra es U y la quinta es E, ¿cuántas posibilidades distintas hay para el password? (Puede haber letras repetidas).
6. [2017SEC] ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son pares y tampoco son múltiplos de 5?
7. [2018PRIM] Don Darío tiene un puesto de jugos. Vende jugos que se hacen combinando dos sabores distintos. Si tiene sandía, melón, papaya, piña, mandarina y naranja, ¿cuántos jugos de dos sabores puede hacer? (Nota: Es lo mismo un jugo de sandía con naranja que uno de naranja con sandía).



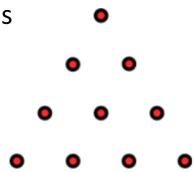
8. [2017SEC] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que contengan al menos uno de los cuadrados sombreados?
9. [PRIM2019] En la figura se muestran las 6 formas que hay de colocar dos fichas en un tablero de 2×2 (no importa en qué orden se ponen las fichas, sólo importa qué casillas se usan). ¿Cuántas formas hay de colocar dos fichas en un tablero de 3×3?



10. [2018PRIM] ¿Cuántos rectángulos (de cualquier tamaño) hay en la figura?

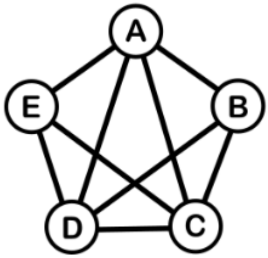


11. [2018SEC] Víctor y Bruno presentaron un examen de opción múltiple con 20 preguntas. Si Víctor tuvo más aciertos que Bruno, ¿de cuántas formas distintas pudieron resultar las calificaciones? (Una forma podría ser Víctor=14, Bruno=11, otra podría ser Víctor=19, Bruno=6, etc.)
12. [2017SEC] En una tabla se han puesto 10 clavos igualmente espaciados, de la manera que muestra la figura. Se quiere colocar una liga sujeta por tres de ellos, de manera que la liga forme un triángulo equilátero. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?



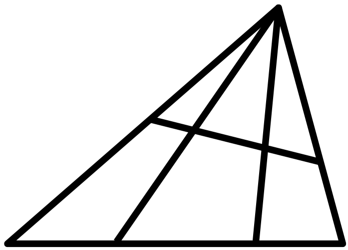
13. [2020SEC] ¿Cuántos triángulos de lados enteros tienen un perímetro igual a 60? Nota: Solo nos importa la forma, por lo que un triángulo con lados 25, 20, 15, sería lo mismo que un triángulo con lados 20, 15 y 25.
14. [2020PRIM] De todos los números de 4 cifras que tienen un dígito 3 en la posición de las centenas, ¿cuántos tienen exactamente dos dígitos iguales?

15. [2020PRIM] Tienes cinco colores: rojo, azul, verde, café y morado. ¿De cuántas maneras diferentes puedes colorear los cinco círculos de manera que no haya dos círculos del mismo color unidos por una línea? Nota: No tienes que usar los 5 colores a la fuerza y los círculos E y B no están unidos



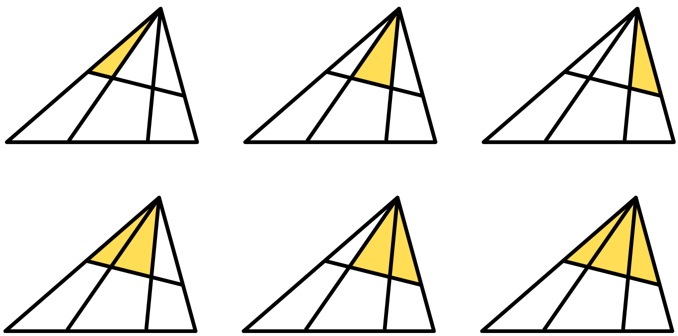
Soluciones (Principios básicos)

1. [PRIM2017] ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



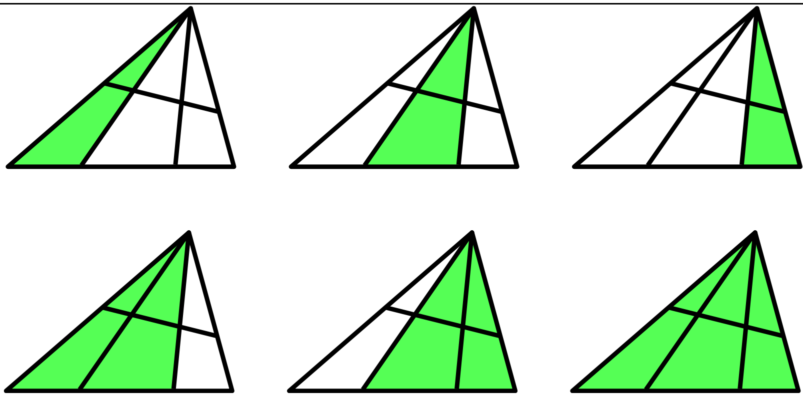
Solución. Todos los triángulos posibles tienen que tocar el vértice superior de la figura, pero hay dos tipos de triángulos, los que tienen el lado contrario dentro de la línea inclinada que atraviesa la figura, y los otros son los que tienen el lado contrario en la línea horizontal en la base de la figura.

Del primer tipo vemos que hay 6 posibilidades:



Un observador cuidadoso podrá notar que, incluso, para contar los de este tipo, también se organizaron dividiéndolos en casos (dependiendo de cuántas partes amarillas forman cada triángulo).

En el segundo caso tenemos también 6 posibilidades.



De manera que en total hay 12 triángulos. El proceder de manera ordenada nos da la certeza de tener el conteo correcto.

2. [PRIM2017] Las páginas de un libro están numeradas 1, 2, 3, …, 300. ¿Cuántas veces aparece en total el dígito 7 en los números de página? (Por ejemplo, en la página 177, el 7 aparece dos veces).

Solución. El 7 puede aparecer en las unidades, en las decenas o en las centenas. Esos serán nuestros 3 casos.

En las unidades aparece una vez cada 10 números, por lo que aparece 42 veces en las unidades.

En las decenas aparece 10 veces cada 100 números (desde el *70 hasta el *79). Tenemos tres grupos de 100 números, así que aparecerá 30 veces (10 veces de 70 a 79, 10 veces de 170 a 179 y 10 veces de 270 a 279).

En las centenas nunca aparece. Por lo tanto, hay 30+30=60 números 7 escritos.

3. [PRIM2017] Fíjate que hay números de cuatro cifras como el 3854 y el 4835, que se forman usando sin repetir las cifras 3, 4, 5, 8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con el 3, 4, 5, 8?

Solución. Este es un ejemplo de problema que se resuelve por principio de la multiplicación, por que para elegir un número hay que tomar 4 decisiones:

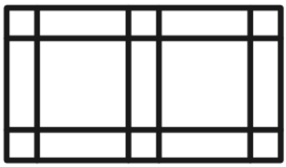
a) Qué dígito se coloca a la izquierda.
b) Qué dígito se coloca en la segunda posición.

c) Qué dígito va en la tercera posición
d) Qué dígito corresponde a las unidades.

La primera decisión puede tomarse de 4 formas (cualquiera de los 4 dígitos puede ser elegido). Sin embargo, la segunda decisión sólo tendrá 3 opciones (por ejemplo, si se eligió el 8 al principio, ahora sólo se puede usar 3, 4 o 5). La tercera decisión tiene 2 opciones y para la última siempre habrá sólo 1 opción.

Por el principio de la multiplicación, habrá 4·3·2·1=24 números posibles.

4. [2019PRIM] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura completa? (los cuadrados grandes en el interior miden 3 cm en cada lado y los cuadrados pequeños de las esquinas miden 1 cm en cada lado).

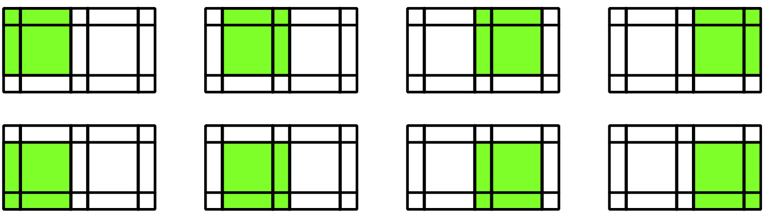


Solución. Dividimos en casos dependiendo de los tamaños de los cuadrados.

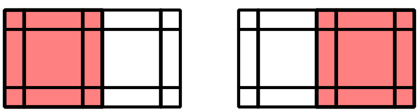
De los cuadros más pequeños (los que miden 1 cm), hay 6 de ellos.

De los cuadros de lado igual a 3 cm, hay 2. Pero también tenemos otros tipos de cuadrados.

Cuadrados de lado igual a 4 cm:



Cuadrados de lado igual a 5 cm:



Por tanto, por el principio de la suma, habrá 6+2+8+2=18 cuadrados.

5. [2017PRIM] El password de la computadora de Luis está formado únicamente por vocales (A, E, I, O, U) y consta de 5 letras. Si la primera letra es E, la tercera letra es U y la quinta es E, ¿cuántas posibilidades distintas hay para el password? (Puede haber letras repetidas).

Solución. Sabemos por lo que indica el problema, que el password tiene que tener la estructura E*U*E, en donde falta por descubrir las dos vocales para los asteriscos.

Lo anterior quiere decir que hay que realizar dos decisiones independientes: la vocal que irá en el primer asterisco y la vocal que irá en el segundo asterisco, teniendo cada decisión 5 posibilidades. El principio de la multiplicación nos proporciona la cantidad total de decisiones: 5·5=25.

6. [2017SEC] ¿Cuántos números hay entre 1 y 100 que no son pares y tampoco son múltiplos de 5?

Solución. Aquí es más fácil contar los números que son pares o múltiplos de 5 y restarlos del total. Sabemos que hay 50 números pares entre 1 y 100. Y por un argumento similar al usado en el problema 2, sabemos que uno de cada 5 números es múltiplo de 5, por lo que habrá 20 múltiplos de 5.

Sin embargo, **no podemos aplicar directamente el principio de la suma** y concluir que hay 50+20=70 números pares o múltiplos de 5, ya que los casos se traslapan (hay números como el 20 que son pares y también múltiplos de 5).

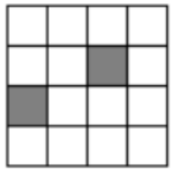
Con un poco de cuidado, observamos que estos números que están siendo contados dobles (y que son la causa de que la suma sea incorrecta) son precisamente los múltiplos de 10, de los cuales hay exactamente 10. Por lo tanto, la cantidad real de pares o múltiplos de 5 es 70-10=60 y por tanto habrá 40 números que no son ni pares ni múltiplos de 5.

7. [2018PRIM] Don Darío tiene un puesto de jugos. Vende jugos que se hacen combinando dos sabores distintos. Si tiene sandía, melón, papaya, piña, mandarina y naranja, ¿cuántos jugos de dos sabores puede hacer? (Nota: Es lo mismo un jugo de sandía con naranja que uno de naranja con sandía).

Solución. Para hacer un jugo hay que tomar dos decisiones: la primera y la segunda fruta usada. La primera fruta puede elegirse de cualquiera de las 6 posibilidades, mientras que la segunda tendrá sólo 5.

Según el principio de la multiplicación habría 6·5=30 diferentes jugos. Sin embargo, ese conteo es incorrecto por la observación de que el orden en que se eligen los jugos no importa (elegir sandía y luego naranja es el mismo jugo que elegir naranja y luego sandía). De esta forma, cada jugo está siendo contado 2 veces, de manera que ese 30 es, en realidad, el doble de la verdadera cantidad de jugos, la cual debe ser igual a 15.

8. [2017SEC] ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que contengan al menos uno de los cuadrados sombreados?



Solución. De nueva cuenta procederemos a dividir por casos dependiendo del tamaño de los cuadrados.

Cuadrados de tamaño 1×1 sólo hay 2 (precisamente los 2 cuadros sombreados).

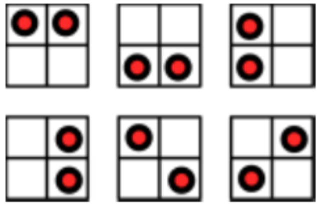
Cuadrados de tamaño 2×2: Hay dos que contienen el sombreado de la izquierda y hay 4 que contienen el sombreado de la derecha, siendo en total 6 cuadrados de este tamaño.

Cuadrados de tamaño 3×3: Hay dos que contienen el sombreado de la izquierda (y también contienen al de la derecha), pero hay dos adicionales que sólo contienen el sombreado de la derecha, nuevamente obtenemos 4 posibilidades.

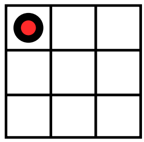
Cuadrados de tamaño 4×4 hay 1.

Por lo tanto, en total, habrá 2+6+4+1=13 cuadrados buscados.

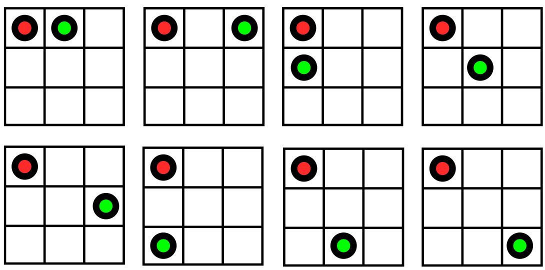
9. [PRIM2019] En la figura se muestran las 6 formas que hay de colocar dos fichas en un tablero de 2×2 (no importa en qué orden se ponen las fichas, sólo importa qué casillas se usan). ¿Cuántas formas hay de colocar dos fichas en un tablero de 3×3?



Solución. Vamos a contar las formas de una manera ordenada. Por ejemplo, nos podemos preguntar ¿cuántas formas hay de poner las dos fichas, de manera que la esquina superior izquierda esté ocupada?

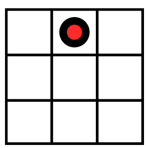


La respuesta es que habrá 8 formas, dependiendo de en dónde se coloque la otra ficha (para diferenciar las 8 opciones, pondremos la segunda ficha en verde):

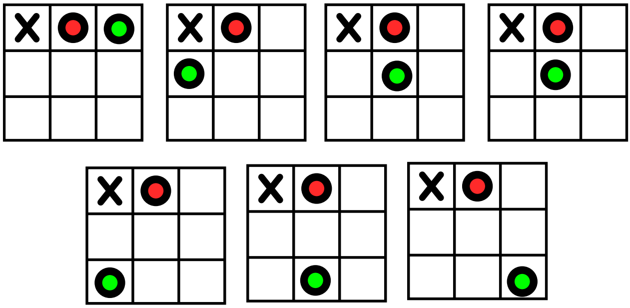


Una vez puesta la ficha roja, solo quedan 8 posiciones para la verde

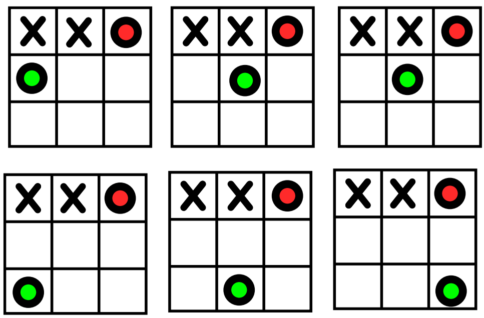
Luego nos podemos preguntar en cuántos arreglos, la ficha roja queda en la segunda casilla.



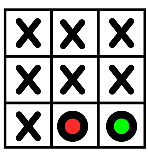
Para no repetir posiciones, en la esquina ya no podemos poner nada (así que la marcamos con una X) y vemos que solo quedan 7 espacios para la segunda ficha:



El mismo razonamiento nos dice que cuando ponemos la roja en la tercera casilla, sólo nos quedan 6 posiciones para la verde:

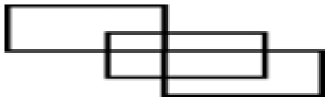


Continuando el patrón, al cambiar la primera ficha, obtendremos en las siguientes posibilidades: 5, 4, 3, 2 hasta llegar a solo 1 cuando la roja está en la casilla 8:



Por lo tanto, la cantidad total de posibilidades es: 8+7+6+5+4+3+2+1 = 36.

10. [2018PRIM] ¿Cuántos rectángulos (de cualquier tamaño) hay en la figura?



Solución. En principio tenemos 3 rectángulos “grandes”. Pero el segundo rectángulo está dividido formando otros nuevos, vamos a contar los que se obtienen de esta forma dividiendo por casos: hay 4 rectángulos “pequeños” y hay 4 rectángulos que se forman uniendo dos pequeños.

Concluimos de este modo que habrá 3+4+4=11 rectángulos.

11. [2018SEC] Víctor y Bruno presentaron un examen de opción múltiple con 20 preguntas. Si Víctor tuvo más aciertos que Bruno, ¿de cuántas formas distintas pudieron resultar las calificaciones? (Una forma podría ser Víctor=14, Bruno=11, otra podría ser Víctor=19, Bruno=6, etc.)

Solución. Cuando Víctor tiene 20 aciertos, la calificación de Bruno puede ir desde 0 hasta 19 y por tanto hay 20 formas de asignar calificaciones cuando Víctor tiene 20 aciertos. Es importante observar que Bruno puede tener cero aciertos, pues de lo contrario tendríamos la idea equivocada de que son 19 formas.

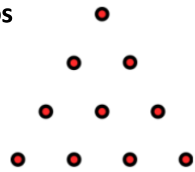
Cuando Víctor tiene 19 aciertos, Bruno puede tener desde 0 hasta 18, por lo que hay 19 formas.

Cuando Víctor tiene 18 aciertos, Bruno puede tener desde 0 hasta 17, por lo que hay 17 formas.

El patrón anterior continúa hasta que Víctor tenga sólo 1 acierto, en cuyo caso Bruno sólo tiene una posibilidad: tener cero aciertos.

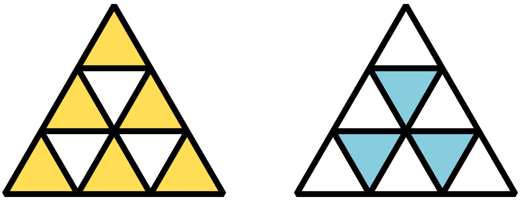
Por tanto, el número total de formas en que pueden resultar las calificaciones será 20+19+18+⋯+3+2+1=210.

12. [2017SEC] En una tabla se han puesto 10 clavos igualmente espaciados, de la manera que muestra la figura. Se quiere colocar una liga sujeta por tres de ellos, de manera que la liga forme un triángulo equilátero. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

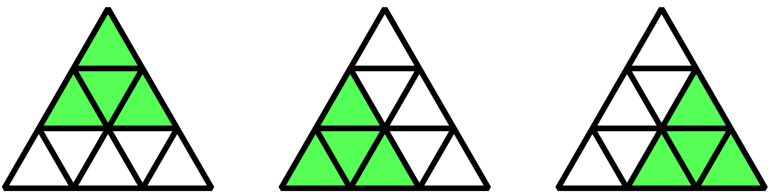


Solución. Una vez más, dividir en casos nos llevará con éxito a la solución.

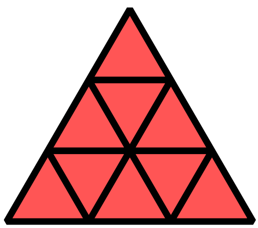
Comenzamos contando triángulos que tengan 1 unidad por lado. De estos, hay dos subcasos: los que apuntan hacia arriba (amarillos) y los que apuntan hacia abajo (azules). Tenemos aquí 9 triángulos.



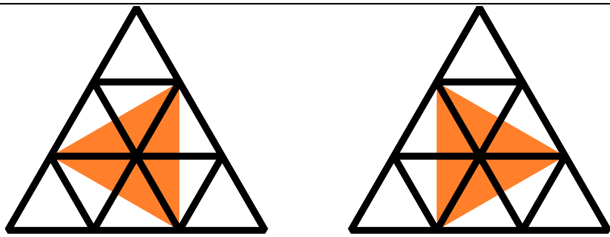
Teniendo dos triángulos por lado, hay solo tres.



Tenemos también un triángulo que tiene tres triangulitos por lado, correspondiendo al triángulo completo.



Sin embargo, existen otros triángulos adicionales que se pueden formar con los puntos del problema, triángulos que no están en posición horizontal o vertical.



Por tanto, en total habrá 9+3+1+2 = 15 triángulos.

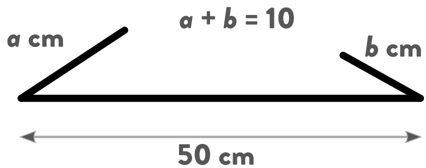
13. [2020SEC] ¿Cuántos triángulos de lados enteros tienen un perímetro igual a 60?

Solución. Este problema no lo podemos resolver de manera directa apelando a los principios básicos, pero al inicio señalamos que hay un principio aún más general: contar de manera ordenada.

Entendemos que lo que diferencia un triángulo de otro son las medidas, y que cambiando la posición de un triángulo no lo cambia en sí, por lo que cada triángulo lo podemos representar como una lista de tres números (las medidas de sus lados), y para evitar repeticiones, podemos supones que esos números (a, b, c) cumplen que $a \leq b \leq c$.

Sabemos que $a + b + c = 60$, por lo que esos números no pueden ser completamente arbitrarios. Por ejemplo, si el más grande de ellos fuera menor a 20, entonces todos serían menores a 20 y por tanto no podrían sumar 60. Entonces hemos descubierto, a través de nuestro razonamiento, algo nuevo: **el lado mayor tiene que medir 20 o más centímetros**.

Ahora, supongamos que el lado mayor mide, por decir algo, 50 cm. Los otros dos sumarían 10, pero entonces es imposible que los lados "cierren", por que la separación entre dos de los vértices es demasiado grande.



Entonces, el lado mayor no puede ser demasiado grande, y meditando un poco lograremos ver que **el lado mayor no puede medir 30 o más centímetros**.

Así, el lado mayor tiene solo una cantidad limitada de posibilidades: 20, 21, 22, y así hasta 29 centímetros.

Ahora sí, ya tenemos una cantidad fija de posibilidades, podemos intentar contar cada una y luego aplicamos el principio de la suma.

Por brevedad, ilustraremos solo un ejemplo. Supongamos que el lado mayor tiene una longitud igual a c=24 cm. Los otros dos lados, a y b tienen que sumar 36. ¿Qué posibilidades tenemos? Lo más grande que puede ser b es 24 (ya que no puede medir más que c), y en ese caso tenemos que a=12. Pero b podría ser más pequeño:

- Si b = 24, a = 12 (para que la suma sea 36)
- Si b = 23, a = 13 (para que la suma sea 36)
- Si b = 22, a = 14 (para que la suma sea 36)
- Si b = 21, a = 15 (para que la suma sea 36)
- Si b = 20, a = 16 (para que la suma sea 36)
- Si b = 19, a = 17 (para que la suma sea 36)
- Si b = 18, a =18 (para que la suma sea 36).

No hay más posibilidades por que a no puede ser mayor a b. Por lo tanto, hay 7 triángulos cuyo lado mayor es igual a 24 cm.

Para referencia, indicamos aquí la cantidad de triángulos en cada valor de c:

- c = 20 cm, 1 triángulo.
- c = 21 cm, 2 triángulos.
- c = 22 cm, 4 triángulos.
- c = 23 cm, 5 triángulos.
- c = 24 cm, 7 triángulos.
- c = 25 cm, 8 triángulos.
- c = 26 cm, 10 triángulos.
- c = 27 cm, 11 triángulos.
- c = 28 cm, 13 triángulos.
- c = 29 cm, 14 triángulos.

Por lo tanto, en total hay 75 triángulos.

14. [2020PRIM] De todos los números de 4 cifras que tienen un dígito 3 en la posición de las centenas, ¿cuántos tienen exactamente dos dígitos iguales?

Solución. Hay que organizar nuestro conteo antes de proceder a hacerlo. En principio, hay dos posibilidades: que el 3 sea el número que se repite, o que solo aparezca una vez. Si contamos cada caso por separado, el total lo obtendremos sumando ambas cantidades.

Ahora, cuando el número repetido es el 3, como ya sabemos que aparece en las centenas, las posibilidades para la "forma" del número son:

- 3 3 _ _
- _ 3 3 _
- _ 3 _ 3

En la primera forma, para poner un dígito en el primer espacio (decenas), tenemos 9 posibilidades (ya que no podemos usar el 3), y como tampoco se puede repetir, en las unidades tendremos sólo 8 posibilidades (no podemos usar el 3 ni podemos usar el dígito que está en las decenas). Por el principio de la multiplicación (estamos tomando dos decisiones), habrá 72 formas de completar el número.

En la segunda forma, en las unidades de millar tenemos sólo 8 posibilidades (no puede ir el 3, pero tampoco puede ir el cero), mientras que en las unidades también tenemos 8 posibilidades (no puede ir el 3 ni el número que escogimos para unidades de millar, pero ahora sí podría aparecer el cero). Por el principio de la multiplicación, habrá 64 formas de completar el número.

En la tercera forma, el razonamiento es similar al usado en la segunda, y nuevamente habrá 64 formas de completar el número. De este modo, en total habrá 75+64+64 = 203 números que cumplen la condición del problema y repiten el número 3.

Sin embargo, aún nos falta contar los números en los que el repetido no es el tres. Tenemos nuevamente varias posibilidades para la "estructura" del número, que se indican a continuación:

- a 3 a b
- a 3 b a

- $b\ 3\ a\ a$

En el primer caso, la letra *a* tiene 8 posibilidades (no puede ser 3 pero tampoco puede ser cero), y la letra *b* también tiene 8 posibilidades (no puede ser 3 ni puede ser la misma que *a*). En total tendremos 8·8 = 64 números.

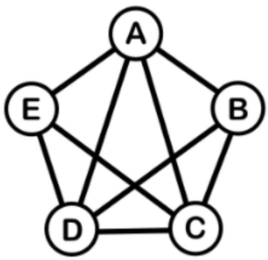
El segundo caso, por un razonamiento similar, tiene 64 números.

En el tercer caso, seleccionamos primero el número *b*, el cual tendrá 8 posibilidades (no puede ser 3 ni 0), y luego tendremos 8 posibilidades para *a* (no puede ser 3 ni puede ser igual a *b*). También tenemos 64 números.

De esta manera, hay 64+64+64 = 192 números en los que se repite un dígito que no es tres.

Por lo tanto, en total, habrá 203 + 192 = 395 números con la propiedad pedida.

15. [2020PRIM] Tienes cinco colores: rojo, azul, verde, café y morado. ¿De cuántas maneras diferentes puedes colorear los cinco círculos de manera que no haya dos círculos del mismo color unidos por una línea? Nota: No tienes que usar los 5 colores a la fuerza y los círculos E y B no están unidos



Solución. Vamos a contar las coloraciones *tomando decisiones*. Primero, decidimos el color que va en A. Tenemos 5 posibilidades, ya que no hay restricción. Como ejemplo, supongamos que elegimos el *verde*.

Ahora, observemos que los colores que van en C y D tienen que ser diferentes (por que están unidos) y tampoco pueden ser iguales al color elegido en A. Primero elegimos un color para C, y tenemos 4 posibilidades (la única restricción, por el momento, es que no sea igual al color de A). Por el principio de la multiplicación, hasta el momento, tenemos $5 \cdot 4 = 20$ formas de elegir el color de A y luego el color de C. Imaginemos, siguiendo el ejemplo, que elegimos *morado*.

Luego, para elegir el color de D, tenemos 3 posibilidades (no podemos repetir el color de A ni el color de C). Por tanto, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas de colorar A, luego C y luego D. Continuando con el ejemplo, imaginemos que elegimos *azul*.

Es turno de elegir un color para B. ¿Cuántas posibilidades hay? No podemos usar los colores elegidos para A, ni para C, ni para D, de manera que hay solo 2 posibilidades (en nuestro ejemplo, sólo podría ser *café* o *rojo,* imaginemos que decidimos usar *rojo*). Hasta aquí, ya tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ formas de colorear A, luego C, luego D y luego B.

Al final tenemos que elegir un color para E. Pero las únicas restricciones son que no sea igual al color de A, C o D, ya que no importa el color que elegimos para B. Así que tenemos también 2 posibilidades (en el ejemplo, podría ser *café* o *rojo*).

Concluimos, por tanto, que la cantidad total de maneras de colorear la figura será

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 240.$$

Muchas gracias por su atención y su paciencia.

Pedro Sánchez
ommyuc@gmail.com