Problemas para el concurso estatal de la

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Yucatán

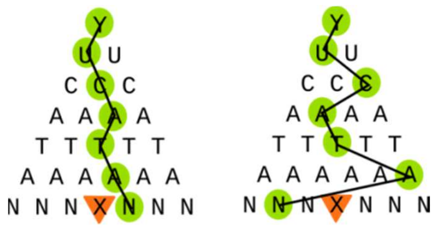
Problemas para el Concurso Estatal de Olimpiada de Matemáticas en Yucatán.

Dr. Didier Solís Gamboa
M.M. Pedro David Sánchez Salazar

La siguiente es una lista de ejercicios de práctica para el concurso de la Olimpiada de Matemáticas. Es muy importante que cada ejercicio sea intentado al menos unos 20 minutos antes de mirar la sugerencia o ayuda para resolver el problema. Ayuda mucho más intentar con perseverancia un ejercicio (aunque no se nos ocurra la solución) que mirar las soluciones a los pocos minutos de toparnos con la primera dificultad.

Problemas

1. Encuentra el número más pequeño que al multiplicar sus cifras, el resultado es 1890.
2. ¿De cuántas maneras distintas se puede formar la palabra **YUCATAN** empezando por la letra **Y** en la cima de la pirámide, si solo se puede bajar moviéndose una posición a la derecha o a la izquierda en cada paso y no se puede llegar a la casilla marcada con la **X**?

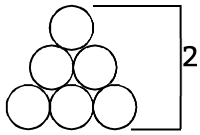


Correcto Incorrecto

3. Si sumas los primeros 2012 números pares (2, 4, 6, 8, 10, etc.) y le restas la suma de los primeros 2012 números impares (3, 5, 7, 9, etc.) ¿Cuál será el resultado?
4. ¿Cuántos números de 3 dígitos cumplen que el producto de sus dígitos es múltiplo de 2 pero no de 4?
5. Tenemos 7 focos apagados alrededor de un círculo. Los focos están numerados del 1 al 7. Samuel se pone a dar vueltas alrededor del círculo, iniciando con el foco 1, presionando el interruptor de cada foco de manera alternada, es decir, uno sí y uno no. Cada vuelta termina cuando pasa del

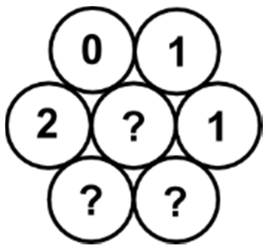
foco número 7 al 1, independientemente de si presiona cualquiera de los interruptores. ¿Qué focos están encendidos después de 2013 vueltas?

6. En la figura aparece un triángulo formado por seis círculos de radio r. Si la altura de toda la figura es 2 ¿Cuánto mide el radio de los círculos?



7. Encuentra la suma de todos los números x tales que $\frac{12}{6-x}$ sea un número entero.

8. En la siguiente figura, cada círculo representa una moneda. Algunas son águila y otras sol. El número en cada una indica la cantidad de monedas junto a ella que son águila. ¿Qué número debería ir en la moneda del centro?



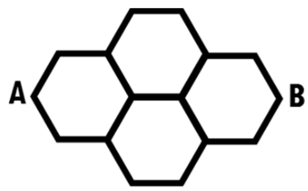
9. ¿Cuál es el residuo obtenido al dividir el número 20122012201220122012201220122012 entre 9?

10. ¿Es posible acomodar signos + o – en las casillas de tal manera que se cumpla

   1 □ 2 □ 3 □ 4 □ ... □ 99 □ 100 = 13^2 ?

11. ¿Qué polígonos regulares tienen la misma cantidad de lados que de diagonales?

12. ¿Cuántos caminos hay del punto A al punto B avanzando sobre las líneas de la figura si no se permite pasar dos veces por un mismo punto y tampoco es posible moverse hacia la derecha de forma horizontal? Es decir, sólo se permiten los movimientos siguientes: $\longrightarrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$



13. ¿Cuántos números menores a 1000 son múltiplos de 6 y además la suma de sus cifras es igual a 21?

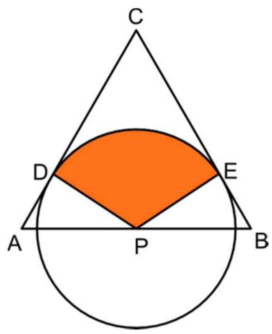
14. ¿Cuál de los números

    x = 2012 (1 + 2 + 3 + ... + 2011)

    y = 2011 (1 + 2 + 3 + ... + 2012)

    es el más grande?

15. Una circunferencia es tangente a los lados AC y BC de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura. Si AB=2, ¿cuánto vale el área sombreada?

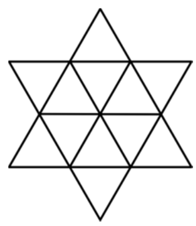


16. En un examen de 30 preguntas de opción múltiple, se obtienen 5 puntos por cada respuesta correcta, 1 punto por cada respuesta dejada en blanco y 0 puntos por una respuesta incorrecta. Al final del examen, cinco estudiantes hacen las siguientes afirmaciones: Drini dice, "Mi puntuación es de 147." Deeds dice, "Mi puntuación es de 144." Efrén dice, "Mi puntuación es de 143." Gus dice, "Mi puntuación es de 141." Walde dice, "Mi puntuación es de 139." Solo uno de los estudiantes puede estar en lo cierto. ¿Quién es

17. ¿De cuántas formas podemos escoger una casilla blanca y una casilla negra en un tablero de ajedrez de manera que no estén en la misma fila o en la misma columna? (Un tablero de ajedrez tiene 8 filas y 8 columnas).

18. Si el promedio de 3 números es 400 y el promedio de otros 2 es 600 ¿Cuál es el promedio de todos los cinco números?

19. ¿Cuántos triángulos hay en la estrella que se muestra a la derecha?



20. ¿De cuántas formas podemos escoger tres números distintos entre 1 y 100 de manera que la suma de los tres números sea múltiplo de 3?

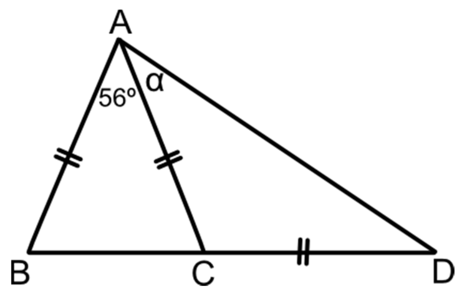
21. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) que cumplan la ecuación $a^2 - b^2 = 2012$.

22. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 para formar un número de cinco dígitos en el que las cifras aumenten y disminuyan de forma alternada? (Un ejemplo sería 13254, donde $1<3$, pero $3>2$, $2<5$ y $5>4$).

23. En la preparatoria Bolita estudian únicamente muchachas, y en la preparatoria Cuadrito únicamente muchachos. Cerca de ambas escuelas se encuentra la Disco Polígono. Un buen día deciden ir todos a bailar. Las entradas cuestan a: n pesos para una muchacha y m pesos para un muchacho (tanto m como n son números enteros).

    En total, las entradas costaron 1 peso más de lo que habrían costado si los boletos costaran a m pesos para una muchacha y n pesos para un muchacho. Cada muchacho baila con una muchacha, pero como había más muchachos que muchachas, algunos se quedaron sin pareja. ¿Cuántos muchachos se quedaron sin pareja?

24. Encuentra la medida del ángulo α si los lados marcados son iguales.



25. Observa la siguiente tabla de números

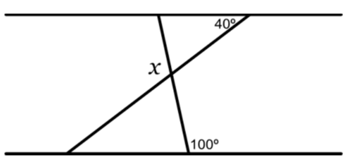
2	0	2	3
1	1	-1	2

    Es posible modificar los números de la tabla mediante la siguiente operación: añadir o restar una misma cantidad a cualquier par de casillas que compartan un lado (observa que es posible que algunas casillas tengan números negativos). ¿Es posible, mediante dichas operaciones, llegar a una situación donde todas las casillas tengan valor 1 ?

26. Si A, B son dos números naturales tales que $\frac{A}{7}+\frac{B}{5}=\frac{31}{35}$, ¿cuál es el valor de A?

27. Comienza con el número 1. Multiplícalo por 3 y suma 5. Al resultado multiplícalo por 3 y súmale 5. Al resultado multiplícalo por 3 y súmale 5. Repite este proceso 2012 veces. ¿Cuál es la cifra de las unidades del resultado?

28. ¿Cuánto vale el ángulo x si las rectas horizontales son paralelas?



29. Si $6!\cdot 7! = n!$, ¿cuánto vale n?

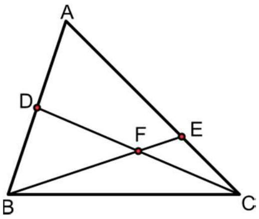
30. ¿Cuántos números enteros positivos n satisfacen la desigualdad $\frac{2}{5} < \frac{n}{17} < \frac{11}{13}$?

31. Si a, b son dos números tales que $2m$-n=3, demuestra que m-2n es un múltiplo de 3.

32. Si escogemos 11 números al azar de la lista {1, 2, 3, 4, 5, ..., 19, 20 }, siempre habrá dos de ellos que sumen 21. ¿Por qué sucede esto?

33. ¿Cuántas veces aparece el factor 2 en la descomposición en primos del número $1 + 2 + 3 + \cdots + 10^{11}$?

34. En la figura de abajo, los puntos D y E cumplen que AD = DB, AE=2 EC y que BE interseca a CD en el punto F. Demuestra que 4 EF = BE.

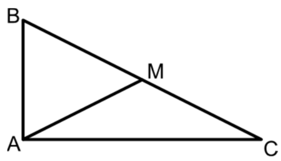


35. Se colorean las casillas de una cuadrícula de 15×15, cada casilla puede ser roja, verde o azul. ¿porqué siempre habrá dos filas en las que haya la misma cantidad de casillas coloreadas de un mismo color? (Es decir ¿por qué no es posible que todas las filas tengan una cantidad distinta de casillas rojas, todas tengan una cantidad distinta de azules y una cantidad distinta de casillas verdes?).

36. Si hubiese venido a la escuela caminando a 4 km/h hubiera llegado 5 minutos tarde. Pero como vine más rápido, a 5 km/h, llegué 10 minutos antes de la hora entrada. ¿A qué distancia está la escuela de mi casa?

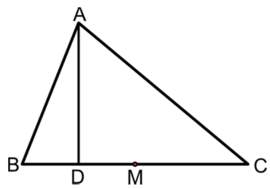
37. Un número tiene 2014 cifras y el producto de todas ellas es 3^{4028}. ¿Cuánto vale la suma de sus cifras?

38. En cualquier triángulo rectángulo, la distancia desde el punto medio de la hipotenusa hasta el ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa. ¿Por qué?



AM = BM = MC

39. En la figura, el ángulo B es igual al doble del ángulo C. Si AD es una altura del triángulo y M es el punto medio del lado BC, explica por qué el lado AB medirá el doble de lo que mide DM.

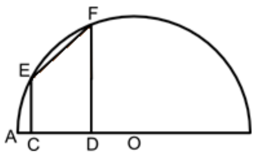


40. Una *progresión aritmética* es una sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando al anterior cierta cantidad fija. Por ejemplo, 3, 5, 7, 9, 11 es una progresión aritmética porque cada término se obtiene del anterior sumando 2.

    Si $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son los dos primeros términos de una progresión aritmética, y si el décimo término es igual a $\sqrt{m}$, ¿cuánto vale m?

41. A Chuchito le regalaron una caja de chocolates. Chuchito come todos los días chocolates de la caja y como le gustan mucho, cada día come un chocolate más que los que comió el día anterior. El primer día Chuchito come 7 chocolates y hoy comió 25 y observó que sólo quedan 6 en la caja. ¿Cuántos chocolates tenía la caja?

42. En un semicírculo de diámetro 26cm, AC = 1cm, AD = 8cm y, EC y FD son perpendiculares a AB, ¿cuánto mide EF?



43. Luis escoge dos números del conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} y escribe en su libreta el número mayor de la pareja que escogió. Después de elegir todas las parejas, Luis sumó todos los números que escribió en su libreta. ¿Cuál es la suma que obtuvo?

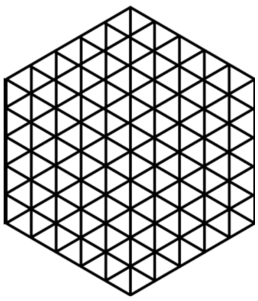
44. En la siguiente figura, en cada uno de los vértices A, B, C, D, E, F se escribe el número 1 o el número -1. ¿Cuántos valores posibles puede tener

$$A + B + C + D + E + F + A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F \text{ ?}$$

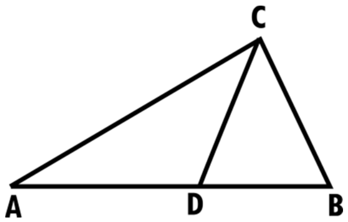
45. Ninguno de los números 1573, 157573, 15757573, 1575757573. etc. es primo. ¿Por qué sucede esto?

46. ¿Cuánto vale la suma $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$?

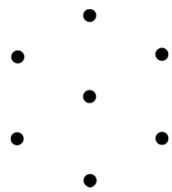
47. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? (Cada lado del hexágono está formado por cinco triángulos).



48. En la siguiente figura se sabe que AC=2, BC=1 y CDB es un triángulo isósceles. Calcula AD·AB.



49. ¿Cuántos triángulos puedes formar que tengan sus vértices en alguno de los siguientes puntos?

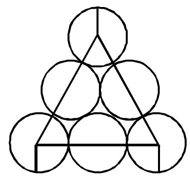


50. En la siguiente suma, cada letra representa un dígito distinto. ¿Cuánto vale la suma de los dígitos de AGUA?

```
 GOTA
 GOTA
 GOTA
 GOTA
 GOTA
 ----
 AGUA
```

Sugerencias

1. Efectúa la factorización de 1890 en números primos. Recuerda que quieres repartirlos de manera que tengas la menor cantidad de cifras posibles.
2. Procede a calcular el número de formas de llegar a cada una de las letras, avanzando de fila en fila.
3. Usualmente cuando un problema nos pide realizar una operación que parece extremadamente larga, es indicio que *en realidad* se nos está pidiendo encontrar una forma diferente y más eficiente de llegar al resultado.
4. Observa que tiene que haber exactamente una cifra par, y que ésta no puede ser ni 4 ni 8.
5. Bosqueja el resultado de hacer la operación algunas veces y trata de encontrar algún patrón que te permita llegar a la respuesta sin hacer el proceso completo.
6. Observa que si trazas los radios entre círculos tangentes, quedan alineados. Considera entonces la figura siguiente y relaciona los radios con la altura de la pirámide



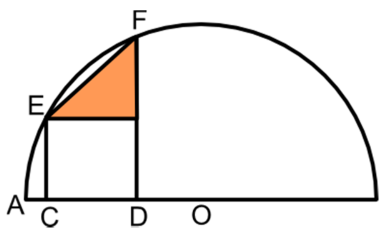
7. Recuerda que un número puede tener divisores negativos, ya que "p divide a q" cuando existe un número entero m (positivo o negativo) tal que "$q = mp$".
8. Puedes comenzar deduciendo qué número debe ir en el centro.
9. Usa el criterio de divisibilidad por 9: el residuo de dividir un número entre 9 es igual al residuo que deja la suma de sus cifras al dividirse entre 9.
10. Piensa primero en lo que sucedería si en todas las casillas pusieras un signo +. ¿Qué pasa con la suma si cambias un signo + por - ?
11. Recuerda que la fórmula para encontrar el número de diagonales de un polígono regular con n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$.
12. Cada recorrido pasa por tres "etapas" (el hexágono de la izquierda, los dos hexágonos centrales, el hexágono de la derecha).
13. Observa primero que el número necesariamente tiene que tener 3 cifras. Representa por a, b, c a las cifras y trata de limitar el número de valores.
14. Puedes hacer uso de la fórmula para sumar los primeros n números consecutivos para poder hallar los valores de x y y.

15. Recuerda que si una recta es tangente a una circunferencia, entonces es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.
16. Imagina primero que un estudiante tuviese todas las respuestas correctas. ¿Qué sucedería? ¿Qué sucedería si tuviera 1 respuesta incorrecta? ¿Si tuviera una en blanco?
17. Imagina que escoges primero la casilla negra. ¿Cuántas opciones tienes? Y luego al escoger la casilla blanca, ¿cuántas opciones tienes?
18. Primero encuentra cuánto deben sumar todos los números, para poder intentar calcular su promedio.
19. Realiza el conteo en orden, dependiendo del tamaño de los triángulos.
20. Clasifica todos los números de 1 hasta 100 dependiendo del residuo que dejan al dividirlos entre 3, y fíjate en la cantidad de elementos que tiene cada grupo.
21. Factoriza ambos lados de la ecuación.
22. Considera los casos dependiendo de cuál es el primer dígito.
23. Si representamos por x al número de muchachos y por y al de muchachas, la condición del problema establece que

$$mx + ny = 1 + my + nx.$$

    Usa la expresión anterior para obtener una restricción en el valor de $x - y$, que es el número de muchachos que se quedaron sin bailar.
24. Recuerda que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales y que un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no-adyacentes.
25. En los problemas en que se realiza una operación repetidas veces, suele ser útil considerar qué cosas no cambian. En este problema específico, se recomienda colorear las casillas de forma alternada en blanco y negro, como si fuera un tablero de ajedrez.
26. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 35 para obtener una relación que no involucre fracciones.
27. Nota que sólo te interesa la última cifra, por lo que no es necesario que hagas las cuentas completas 2012 veces.
28. Revisa cuáles de los teoremas de ángulos entre paralelas puedes aplicar en esta figura.
29. Trata de igualar las factorizaciones en números primos.

30. Podemos considerar las dos desigualdades separadas. Cada una de ellas corresponde a una condición sobre n obtenida al despejar y eliminar las fracciones.
31. Demostrar quiere decir explicar la razón por la cual algo sucede. Si quieres demostrar que un número es un múltiplo de 3, tienes que explicar el por qué lo puedes escribir como 3·(otro número).
32. Fíjate qué coincidencias... escoges 11 números de 20 posibles y quieres ver que siempre hay 2 de los escogidos que sumen 21 (y 21 es uno más que 20). Además, estás escogiendo 11 de los 20 (y 11 es uno más que la mitad de 20). ¿Coincidencias?
33. Ayúdate de la fórmula de Gauss: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ para evaluar la suma que indica el problema.
34. Traza una línea paralela a BE que pase por D. Llama M al punto de corte con el lado AC. ¿Qué tiene de especial ese punto M?
35. Imagina que fuera posible pintar todas las casillas de manera que cada fila tenga una cantidad diferente de casillas rojas (y lo mismo de azules y de verdes). ¿Cuántas casillas necesitaría haber para que eso suceda?
36. La cantidad desconocida, la distancia, la podemos expresar como x. Plantea una ecuación que relacione esta cantidad con los datos del problema.
37. Si el producto de las cifras es 3^{4028}, cada dígito debe ser una potencia de 3, es decir, debe ser 1, 3, o 9.
38. Cuando trazas la línea que va del punto medio de la hipotenusa hacia el ángulo recto, divides al triángulo rectángulo en dos triángulos menores. Ahora, traza la altura de alguno de ellos y observa que dicha altura es una línea paralela a un lado del triángulo rectángulo y que pasa por el punto medio de uno de los otros lados.
39. Traza la línea paralela al lado AB que pasa por el punto M. ¿Qué pasaría si demuestras que DM = MP?
40. Observa que $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$.
41. Usa la suma de Gauss para sumar enteros consecutivos.
42. Considera el triángulo sombreado en la figura:



43. ¿Cuántas veces aparece cada resultado posible en la libreta?
44. Fijémonos que en $A+B+C+D+E+F$ y en $A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F$ no importa tanto cuáles son iguales a -1, sino más bien importa cuántos de ellos son iguales a -1.
45. Cada número en la lista se obtiene sumando 2 al anterior, luego multiplicando por 100 y sumando 73. Usando esa propiedad, demuestra que todos los números de la lista son múltiplos de 13.
46. Racionaliza cada uno de los términos de la suma.
47. Hay dos tipos de triángulos, dependiendo de la "dirección en la que apuntan", los que apuntan a la derecha y los que apuntan a la izquierda. Basta con contar los triángulos de un tipo y multiplicar la cantidad por 2.

    Para contar los triángulos de cada tipo, conviene hacerlo de forma ordenada, según el tamaño de los triángulos.
48. Traza la perpendicular desde C hasta DB, llama E al punto de corte y haz uso del hecho que AD = (AE-DE), AB = (AE+EB).
49. Es posible calcular todas las formas de escoger 3 puntos de la figura. Sin emabrgo, no todas las elecciones de 3 puntos corresponden a triángulos. ¿Cuáles y cuántas son esas?
50. Trata de encontrar algunas condiciones que deban cumplir los dígitos. ¿Cuáles *podrían* ser cero? ¿Cuáles no? Fíjate que al sumar la columna de las unidades, A+A+A+A+A es un número que termina en A.

Soluciones

1. Como $1890 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ y queremos formar el número más pequeño, podríamos intentar formar el número 233357. Sin embargo éste no es el menor, porque podemos encontrar uno con menos cifras agrupando los factores como sigue: 2×3=6, 3×3=9. Entonces con 6, 9, 5, 7 el número más pequeño que podemos formar es el 5679.

2. Sólo hay 1 forma de llegar a las letras U. Para llegar a la tercera fila, se puede llegar a las letras C de la orilla de sólo 1 forma pero a la de en medio de 2 formas (bajando desde cualquier U). Procedemos de esta forma, anotando en cada fila de cuántas formas se puede llegar a cada letra. Observemos que las letras de las orillas sólo pueden ser alcanzadas de 1 forma, pero las del interior pueden ser alcanzadas desde dos casillas, haciendo que se sumen las formas de llegar hasta ella.

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15   X  15   6   1
```

   Pero entonces, el número de formas de llegar al final de la palabra sin tocar la X es:

   1+6+15+15+6+1 = 44.

3. Observa que $(2+4+6+8+\cdots) - (1+3+5+7+\cdots)$ lo podemos reescribir como

   2 + 4 + 6 + 8 + ...
   - 1 - 3 - 5 - 7 - ...

   y que, como el orden en que se realizan sumas y restas no cambia el resultado, podemos hacer la cuenta como (2-1) + (4-3) + (6-5) + (8-7) + ... que es igual a 1+1+1+....

   Como hay 2012 números pares y 2012 números impares, al final tendremos la suma de 2012 números uno y por tanto el resultado será 1+1+1... = 2012.

4. Si hubiese dos o más cifras pares, entonces el producto completo sería divisible entre 4 (porque cada cifra par contribuiría con un factor de 2). Por

otro lado, si todas las cifras fueran impares, su par no sería par. Esto quiere decir que sólo una de las cifras puede ser múltiplo de 2. Además, dicha cifra par no puede ser ni 0, ni 4 ni 8, porque el resultado de multiplicar las 3 cifras sería múltiplo de 4 (el cero no se puede, porque 0 es múltiplo de 4).

Imaginemos que la primera cifra es par: entonces puede ser 2 o 6. En las otras dos cifras podemos poner cualquier número impar (1, 3, 5, 7, 9) por lo que hay en total 2×5×5 formas de construir el número de tres cifras □□□ si sabemos que la primera es par.

Pero lo mismo sucederá cuando la cifra par vaya en medio (hay 2 opciones para la casilla central, cinco para la primera y cinco para la última) o cuando vaya al final (hay 5 opciones para la primera casilla, cinco para la segunda y 2 para la tercera).

Así, el número total de números de 3 cifras que nos piden es 75+75+75 = 225.

5. Al final de la primera vuelta están prendidos los focos 1, 3, 5, 7 y apagados los focos 2, 4, 6. Esto lo representaremos mediante la serie: **(1 0 1 0 1 0 1)** (donde ponemos **1** si el foco en esa posición está encendido y **0** si está apagado).

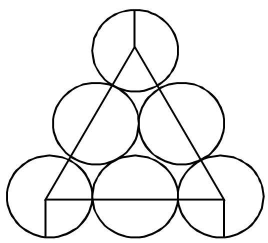
   Después de prender el foco 7, brinca el foco 1 y prende los focos 2, 4, 6, terminando la segunda vuelta con la serie **(1 1 1 1 1 1)**.

   Después de encender el foco 6, brinca el foco 6 y presiona el interruptor del foco 1, apagándolo. Entonces apaga 1, 3, 5, 7 resultando en la serie **(0 1 0 1 0 1 0).**

   En la cuarta vuelta, después de apagar el foco 6, brinca al foco 1 y apaga los focos 2, 4, 6, resultando en la serie **(0 0 0 0 0 0 0).**

   Observemos que después de 4 vueltas los focos quedan todos apagados como al inicio, por lo que al final de las vueltas, 4, 8, 12, 16, 20, etc. todos los focos están apagados. Como 2012 es un múltiplo de 4, al terminar la vuelta 2012 estarán todos los focos apagados y por tanto al terminar la vuelta 2013 tendremos la serie **(1 0 1 0 1 0 1)** que quiere decir que los focos encendidos son 1, 3, 5, 7.

6. Usando la figura siguiente, podemos observar que la altura de la pirámide es igual a sumar 2 radios con la altura del triángulo equilátero formado en medio.

   2 = 2r + altura del triángulo

   La medida del lado del triángulo es igual a 4r, por lo que, trazando la altura y haciendo uso del teorema de Pitágoras, podemos decir que $altura = \sqrt{(4r)^2-(2r)^2} = \sqrt{16r^2-4r^2} = \sqrt{12\,r^2} = 2\sqrt{3}r$.

Así, podemos combinar este último resultado con el mencionado arriba para obtener

$$2 = 2r + 2\sqrt{3}r = (2 + 2\sqrt{3})r$$

Y por tanto $r = \frac{2}{2+2\sqrt{3}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$.

7. Los divisores positivos de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Si x-6 es igual a alguno de ellos, entonces x debe ser 7, 8, 9, 10, 12 o 18.

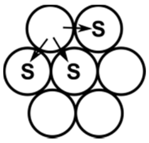
   Los divisores negativos de 12 son: -1, -2, -3, -4, -6 , -12. Si $x - 6$ es igual a alguno de ellos, entonces x debe ser 5, 4, 3, 2, 0 o -6.

   Entonces la suma buscada es : (1+2+3+4+6+12) + (5+4+3+2 – 6) = 36.

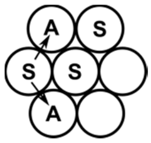
8. El cero de la parte superior izquierda quiere decir que en sus tres vecinas debe ir SOL.

   Entonces, el 2 que se encuentra en medio y a la izquierda quiere decir que sus otras dos casillas vecinas tienen que ser águilas.

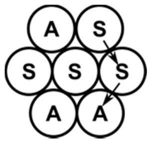
   El 1 que se encuentra en la parte superior derecha ya tiene su vecino AGUILA. Por tanto, en la posición en medio a la derecha tiene que ir un SOL. Y como en esta posición también hay un 1, en la moneda de la posición inferior derecha tiene que estar AGUILA.



Paso 1)



Paso 2)



Paso 3

   Por tanto, el número que corresponde al centro es el número 3.

9. Recordemos que el criterio de divisibilidad por 9 nos dice que el residuo al dividir un número entre 9 es igual al residuo que deja la división entre 9 de la suma de sus cifras. La suma de las cifras del número que nos indican es 10 veces 2+0+1+2 = 5, por lo que es igual a 50. Pero al dividir 50 entre 9 el residuo es igual a 5, por lo que el residuo de dividir entre 9 el número original también es 5.

10. Observa primero que si colocas en todas las casillas un signo +, entonces el resultado será

    1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5050.

    Por otro lado, observa que si cambiamos un signo + por un signo – estamos restando a la suma total el doble del número correspondiente. Por ejemplo, si cambiamos +3 por -3, el nuevo resultado será 5050 – 6 = 5044. Esto quiere decir que cada vez que cambiamos un signo + por un signo -, estamos restando un número par a la suma completa. Pero inicialmente (cuanto todos los signos son +) la suma es par (vale 5050), y si cambiamos varios signos + por -, estamos restando números pares a un número par, dando como respuesta otro número par.

Es decir: no importa qué signos pongamos + o - , el resultado siempre es un número par. Por tanto, no es posible obtener 13^2, ya que este número es impar.

11. Imagina que escoges un vértice del polígono y lo marcas para diferenciarlo. ¿Cuántas diagonales puedes trazar a partir de ese vértice? Como no lo puedes unir consigo mismo ni con sus dos vecinos (porque resultarían lados y no diagonales) entonces se pueden trazar n-3 diagonales. Pero hay n vértices. Entonces el número de diagonales parecería ser $n(n-3)$. Sin embargo, esta cuenta tiene un error: cada diagonal la estás tomando en cuenta dos veces (una vez por su extremo inicial y otra en su extremo final). Como cada diagonal se cuenta dos veces, para corregir la cuenta basta tomar la mitad del resultado: $\frac{n(n-3)}{2}$.

    Ahora, queremos saber para qué polígonos ese número es igual al número de lados. En otras palabras, queremos que $n = \frac{n(n-3)}{2}$. Haciendo el despeje, tenemos $2n = n(n-3)$ y por tanto $2 = (n-3)$. Pero eso quiere decir que n = 5.

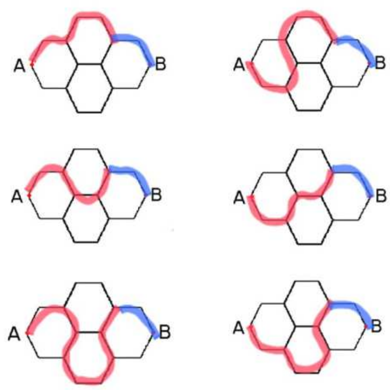
12. Cada recorrido pasa por tres "etapas" (el hexágono de la izquierda, los dos hexágonos centrales, el hexágono de la derecha).

    Además, sólo hay dos formas de "terminar" el recorrido: en el hexágono de la derecha se termina por el camino de arriba o se termina por el camino de abajo. Vamos a contar las del primer tipo y el resultado final será el doble de dicha cantidad.

    La primera etapa tiene 2 posibilidades: ir por arriba, o ir por abajo.

    La segunda etapa tiene 3 posibilidades dependiendo de por cuál de las líneas horizontales se pasa.

    Entonces, hay 6 posibilidades en total, terminando el recorrido "por arriba", tal y como muestra a continuación.

    En la figura, los tres diagramas de la izquierda muestran los recorridos que inician "por arriba", mientras que los tres diagramas de la derecha muestran los recorridos que comienzan “por debajo”.

En todos ellos, el camino termina “por arriba”.

Así como hay 6 recorridos que terminan por arriba, hay 6 recorridos que terminan por abajo y el resultado total es: 12 recorridos.

13. Si el número tuviera sólo 2 cifras, la mayor suma posible sería 18 (para 99, se tiene 9+9=18). Queremos que la suma sea 21, por tanto, es necesario que el número tenga 3 cifras. Sean *a, b* y *c* las tres cifras.

    Para que un número sea múltiplo de 6, se necesita que sea múltiplo de 3 y múltiplo de 2. Por el criterio de divisibilidad por 3, para que el número sea múltiplo de 3 es necesario que la suma *a+b+c* sea múltiplo de 3. Y para que el número sea múltiplo de 2, es necesario que la última cifra *c* sea 0, 2, 4, 6 u 8.

    Si la última cifra es 0 o 2, entonces la suma nunca puede ser 21 (porque lo más que puede llegar a ser *a+b+*2 sería 20). Entonces las únicas posibilidades que quedan son que *c* sea igual a 4, 6 u 8.

    Si la última cifra es 4, las otras dos deben sumar 17. Las únicas posibilidades son 984 y 894.

    Si la última cifra es 6, las otras dos deben sumar 15. Las posibilidades son 696, 786, 876, 966.

    Si la última cifra es 8, las otras dos deben sumar 13 y las posibilidades son 498, 588, 678, 768, 858, 948.

    En total tenemos, 12 números menores que 1000, múltiplos de 2 y cuyas cifras suman 21.

14. Haremos uso de la fórmula para sumar los primeros n enteros consecutivos:

    $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

    Calculemos primero x:

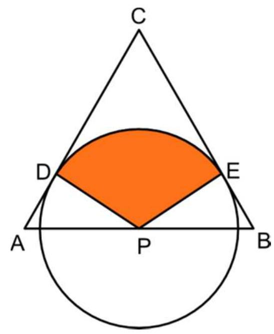
    $$x=2012(1+2+3+\cdots+2011)=\ 2012\left(\frac{2011\cdot 2012}{2}\right)=\frac{2011\cdot 2012\cdot 2012}{2}$$

    Por otro lado:

    $$y=2011\ (1+2+3+\cdots+2012)=\ 2011\left(\frac{2012\cdot 2013}{2}\right)=\frac{2011\cdot 2012\cdot 2013}{2}$$

    De donde se observa claramente que y es mayor a x.

15. Como las rectas AC y BC son tangentes a la circunferencia, se cumple que AC es perpendicular al radio PD y BC es perpendicular al radio PE.



Por otro lado, los ángulos del triángulo equilátero miden 60˚, de manera que el ángulo APD y el ángulo BPE deben medir 30˚ (para que los tres ángulos del triángulo APD y del triángulo BEP sumen 180˚).

Pero si los ángulos APD BPE miden 30˚, entonces el ángulo DPE mide 120˚, y como 120˚ es un tercio de 360˚, el área sombreada debe ser igual a la tercera parte del área del círculo. Sólo nos queda por determinar cuál es el área del círculo.

Esto lo podemos hacer de varias formas. Una forma podría ser trazar la altura CP y construir una ecuación mediante el uso del Teorema de Pitágoras con los triángulos rectángulos CPE y EPB.

Otra forma es observar que EPB es un triángulo rectángulo cuyos ángulos son 60˚, 30˚ y 90˚, por tanto es igual a la mitad de un triángulo equilátero. Como PB = 1, se debe tener BE =1/2. Aplicando teorema de Pitágoras en el triángulo EPB resulta en:

$$r = PE = \sqrt{PB^2 - EB^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Entonces el área del círculo es

$$\pi r^2 = \pi\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{3\pi}{4}$$

Y el área sombreada es la tercera parte de eso: $\frac{\pi}{4}$.

16. Imaginemos primero que un estudiante tuviera todas las respuestas correctas. En ese caso, su puntuación sería de 150. Cada respuesta incorrecta resta 5 puntos y cada respuesta en blanco resta 4 puntos.

Entonces las calificaciones posibles si le faltó una respuesta correcta podrían ser 145 o 146. Por tanto Drini debe estar mintiendo pues no es posible obtener calificación de 147.

Cuando faltan dos respuestas correctas, se tiene que restar 4 o 5 de las dos posibilidades anteriores, resultando en 141 o 140, 142 o 141. Por tanto Efrén y Deeds deben ser mentirosos ya que ni 144 ni 143 son calificaciones posibles.

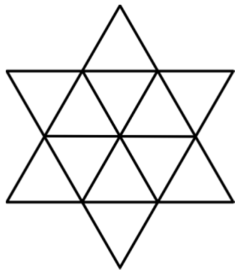
Cuando faltan 3 respuestas correctas, las posibildades serían 137, 136, 136, 135, 138, 137, 137, 136. Por tanto Walde también es mentiroso y el único que podría decir la verdad sería Gus

17. Primero escojamos la casilla negra. Dado que el tablero es de 8×8, hay 64 casillas y por tanto 32 casillas negras para escoger.

    Luego, al escoger la casilla blanca ya no tenemos 32 opciones: hay precisamente 8 casillas blancas que están en la misma fila o columna que la casilla negra que escogimos inicialmente (hay 4 en su misma fila y 4 en su misma columna). Por tanto sólo hay 32-8 = 24 casillas blancas para escoger (por cada elección de la casilla negra) y así, hay 32×24 = 768 posibilidades.

18. Si tres números tienen promedio 400, quiere decir que la suma de todos ellos es igual a 1200. Si los otros dos tienen promedio 600, su suma también debe ser 1200. Entonces la suma de los cinco números debe ser 1200+1200=2400 y por tanto su promedio es de 2400/5 = 480.

19. De los triángulos más pequeños (digamos, de lado 1) hay 12.

    También hay triángulos "de lado 2" formados por 4 triángulos pequeños. Hay 3 que apuntan hacia arriba y 3 que apuntan hacia abajo. Con estos ya acompletamos 18 triángulos en total.

    Pero hay también dos triángulos grandes (de lado 3): uno que apunta hacia arriba y otro que apunta hacia abajo. En total tuvimos así 20 triángulos.

20. Dividamos a los números entre 1 y 100 en tres clases, dependiendo de cuánto dejan de residuo al dividirse entre 3:

    A = {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ...}

    B = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...}

    C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...}

    Unas cuentas nos permiten verificar que el grupo A tiene 34 elementos, mientras que los grupos B y C tienen 33 elementos.

    Para escoger tres números cuya suma sea múltiplo de 3 es necesario:

    - Escoger tres números del mismo grupo
    - O escoger un número de cada uno de los grupos.

    Escoger tres números del primer grupo se puede hacer de $C(34,3) = \frac{34!}{31!3!} = 5984$ formas. Escoger tres números del segundo grupo se puede hacer de $C(33,3) = \frac{33!}{30!3!} = 5456$ formas y escoger tres números del tercer grupo también de 5456 formas.

    Escoger un número de cada grupo se puede hacer de $34 \times 33 \times 33 = 37026$ formas.

Entonces, el resultado total es que hay $5984 + 5456 + 5456 + 37026 = 53922$ formas de escoger los tres números entre 1 y 100 para que la suma de ellos sea múltiplo de 3.

21. Observemos que el lado izquierdo de la ecuación es una diferencia de cuadrados y por tanto, se puede factorizar. Además, el lado derecho se puede factorizar en números primos como $2012 = 2^2 \times 503$. Tenemos entonces:

$$(a+b)(a-b) = 2^2 \cdot 503.$$

Observa también que cuando escoges dos números, su suma y su resta tienen la misma paridad. Esto quiere decir que si *a+b* es par, entonces *a-b* es par, y si *a+b* es impar entonces *a-b* también.

Pero *a+b* y *a-b* no podrían ser los dos impares, porque entonces su multiplicación sería impar, pero sabemos que la multiplicación debe dar 2012. Entonces *a+b* y *a-b* tienen que ser números pares.

Haciendo uso de que *a+b* debe ser mayor que *a-b*, y mediante la factorización de 2012 en primos, llegamos a que la única posibilidad es que *a+b* = 2·503 = 1006 y *a-b* = 2. Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que a=504 y b=502 es la única solución posible.

22. Cuando el número inicia con 1, tenemos:

13254, 14253, 14352, 15243, 15342.

Si escribimos cada uno de ellos al revés obtenemos otro número alternante.

Comenzando con 2 tenemos:

23154, 24153, 25143, ~~24351~~, ~~25341~~

Pero los dos últimos ya los habíamos contado antes. Invirtiendo el orden de los otros tres, nos da nuevos números alternantes.

En total, tenemos 5 + 5 + 3 + 3 = 16.

23. Si representamos por x al número de muchachos y por y al de muchachas, la condición del problema establece que

$$mx + ny = 1 + my + nx.$$

Pero entonces:

$$mx + ny - my - nx = 1,$$

es decir:

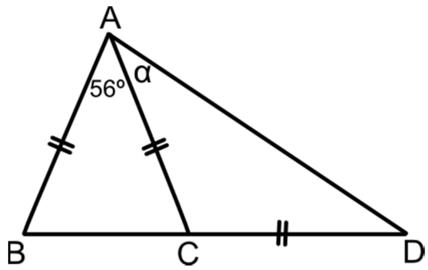
$$(mx - nx) - (my - ny) = (m-n)(x-y) = 1.$$

Como ambos factores son enteros cuyo producto es igual a 1, son ambos iguales a 1 o ambos iguales a -1.

Por otro lado, sabemos que hay más muchachos que muchachas (es decir, $x > y$), por lo que la única posibilidad es que $x - y = 1$, de modo que sólo un muchacho se quedó sin pareja para bailar.

24. Observa en la figura que los triángulos ABC y ACD son isósceles.

Sea x el valor de los ángulos en la base de ABC. Esto quiere decir que $x = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB$ y por tanto $x = \frac{180° - 56°}{2} = \frac{124°}{2} = 62°$.



Por otra parte, el ángulo ACB es externo para el triángulo ACD y de esta manera $62° = \measuredangle CAD + \measuredangle CDA = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Pero de esta última relación podemos concluir que $\alpha = 31°$.

25. Vamos a colorear las casillas de la tabla de forma alternada:

2	0	2	3
1	1	-1	2

Observa que si escoges dos casillas que compartan un lado, siempre estás escogiendo una casillas blanca y una casilla sombreada. Y si aumentas o restas la misma cantidad en esas dos casillas, la suma total de las casillas blancas y la suma total de las casillas sombreadas cambia en esa misma cantidad. Pero como se dan los números, las casillas sombreadas suman 7 y las casillas blancas suman 4, por lo que, no importa qué cambios hagamos, las casillas sombreadas siempre le van a ganar por 3 a la suma total de las blancas. La conclusión es que no se puede lograr que todas las casillas tengan el número 1, porque en ese caso la suma total blanca y la suma total sombreada deben ser iguales.

26. Multiplicando ambos lados de la ecuación, tenemos la relación 5A+7B=31. Si A fuera 7 o mayor, el lado derecho excedería 31, por lo que las únicas posibilidades son que A sea 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Por otro lado, 7B = 31 – 5A, de manera que podemos probar cada uno de los valores posibles para A y verificar si obtenemos un múltiplo de 7. Esto sólo sucederá cuando A =2, ya que 31 – 5A =21 (es decir, A=2, B=3).

27. Conviene hacer los primeros resultados para tratar de encontrar un patrón. La "operación" es multiplicar por 3 y sumar 5.

La serie de resultados que vamos obteniendo es

$1 \rightarrow 8 \rightarrow 29 \rightarrow 92 \rightarrow 281 \rightarrow 848 \rightarrow \ldots$

Sin embargo, lo único que nos interesa es la última cifra. Observa que

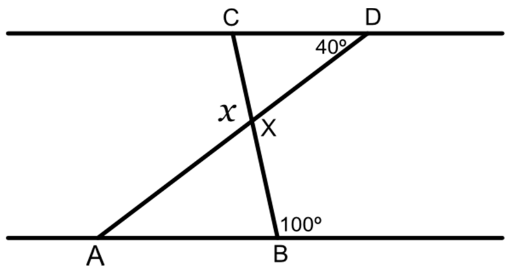
Si la última cifra es 1, la siguiente debe ser 8 (porque ...1×3 termina en 3 y al sumar 5 terminará en 8). Si la última cifra es 8, la siguiente es 9 (porque ...8×3 termina en 4 y al sumar 5 terminará en 9). Si la última cifra es 9, la siguiente es 2 (porque ...9×3 termina en 7 y al sumar 5 terminará en 2). Si la última cifra es 2, la siguiente es 1 (porque ...2×3 termina en 6 y al sumar 5 termina en 2).

Por tanto, la serie de "últimas cifras" es

$1 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow \ldots$

que se repite de 4 en 4. Al realizar la operación 2012 veces (es decir, al avanzar 2012 lugares) terminamos en la posición 2013. Pero como se fue de 4 en 4, la última cifra de el número que corresponde es 1.

28. Observa que, debido a que son ángulos alternos internos entre paralelas, el ángulo XAB es igual al ángulo XDC. Por tanto, el ángulo XAB mide 40˚.



Pero el ángulo x es el ángulo externo del triángulo XAB y por tanto es igual a sumar los ángulos XAB y XBA. Ya sabemos que el ángulo XAB mide 40˚. El ángulo XBA mide 80 ˚ porque es lo que le falta a 100 ˚ para formar un ángulo llano.

Entonces, el ángulo x es igual a 40 ˚ + 80 ˚ = 120 ˚.

29. Observa que $6! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5$.

Si queremos continuar 7! Para obtener otro factorial, necesitamos seguir con 8. Esto se puede porque $8=2^3$ y nos falta por multiplicar ahora $2{\cdot}3^2{\cdot}5$. El siguiente número es $9=3^2$ y nos falta por multiplicar $2{\cdot}5$, pero esto es precisamente 10. Concluimos entonces que al multiplicar 6! Por 7! el resultado es igual a 10!

30. Las dos desigualdades son equivalentes a $17{\cdot}2 < 5n$ y $13n < 17{\cdot}11$. Esto es,

$$\frac{34}{5} < n < \frac{187}{13}.$$

Pero 34/5 = 6.8 y 187/13 = 14.3. Por tanto los valores de n que cumplen la desigualdad son: 7, 8, 9, ..., 14. Por tanto hay 8 posibles valores de n.

31. Nota que $m-2n=(m-2n)+(3-3)=(m-2n)+(2m-n-3)=3m-3n-3$. Pero $3m-3n-3=3(m-n-1)$ de manera que siempre se obtiene un múltiplo de 3, sin importar cuales son los valores de m y n.

32. Fíjate que estamos escogiendo 11 números y tenemos 20 posibilidades. Y que 11 es casi la mitad de 20. Queremos también parejas de números que sumen 21. Vamos a hacer una lista de las posibilidades:

    [1,20] [2, 19] [3, 18] [4, 17] [5, 16] [6, 15] [7, 14] [8, 13] [9, 12] [10, 11]

    Podemos imaginar que son "cajas" en las que hay números. Si de casualidad, al escoger los 11 números, resulta que escogimos 2 números de la misma caja, entonces ya tenemos dos números que suman 21.

    Ahora bien, para que NO hubiese dos números de los escogidos que sumen 21, tendríamos que escoger todos los números de cajas diferentes. Pero sólo tenemos 10 cajas y estamos escogiendo 11 números, por tanto, por mucho que intentemos evitarlo, siempre terminamos escogiendo dos números de la misma caja y por tanto dos números escogidos sumarán 21.

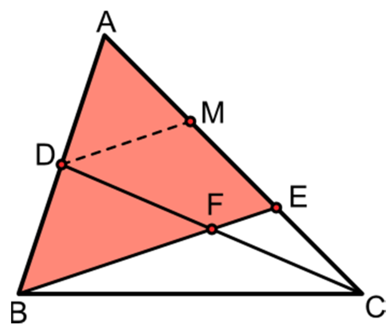
33. Usando la suma de Gauss, encontramos que la suma que indica el problema es igual a:

$$1+2+3+\cdots+10^{11}=\frac{10^{11}(10^{11}+1)}{2},$$

    Pero $10^{11}+1$ es impar, de manera que todos los posibles factores 2 aparecen en $\frac{10^{11}}{2}$. Por otro lado, $\frac{10^{11}}{2}=\frac{2^{11}\cdot 5^{11}}{2}=2^{10}\cdot 5^{11}$, de modo que la respuesta es 10.

34. Tracemos una línea paralela a BE que pase por D y le llamaremos M al punto de corte con el lado AC.

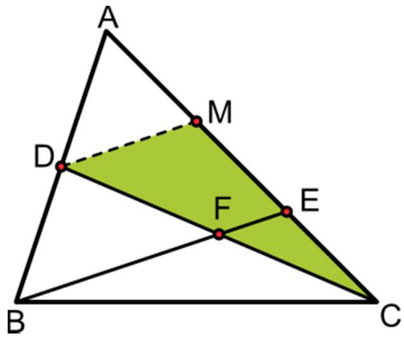
    Ahora, fíjate en el triángulo ABE. Acabamos de trazar una línea paralela a su base y que pasa por el punto medio de un lado; entonces tiene que pasar por el punto medio del otro lado, es decir AM = ME. Pero como AE es el doble de EC, tenemos también AM = ME = EC.



    Además, la línea que une los puntos medios de los lados de un triángulo debe medir la mitad de lo que mide la base. Así:

$$DM = \frac{BE}{2}.$$

Pero fíjate también en el triángulo DMC.



Como ME = EC, resulta que EF es una línea paralela al lado DM y que pasa por el punto medio E (pues E se encuentra a la mitad de EC). Estamos en una situación similar a la de arriba y por tanto

$$EF = \frac{DM}{2}.$$

Haciendo la sustitución tenemos

$$EF = \frac{DM}{2} = \frac{BE/2}{2} = \frac{BE}{4},$$

Es decir, BE = 4 EF, como se nos pedía demostrar.

35. Imaginemos que sí es posible. Por ejemplo, que todas las filas tengan una cantidad diferente de casillas rojas. ¿Cuántas casillas rojas debe haber como mínimo?

    Pues es posible que alguna fila no tenga casillas rojas (0 casillas rojas). Alguna otra tenga sólo 1. En alguna otra fila podría haber 2 casillas rojas y así sucesivamente. Como no se repite ningún número, la menor cantidad posible de casillas rojas que debe haber sería

    1 + 2 + 3 + 4 + ... + 14 = 105.

    Donde hay que recordar que son 15 filas en total. Pero así como se necesitan al menos 105 casillas rojas para que no se repita cantidad en ninguna fila, entonces se necesitan al menos 105 casillas verdes y 105 casillas azules. Esto quiere decir que al menos debería haber 105+105+105=315 casillas pero como la cuadrícula es de 15×15=225, no vamos a tener suficientes casillas. En otras palabras, no tenemos casillas suficientes para evitar que dos filas tengan la misma cantidad de casillas de algún color.

36. Si x representa la distancia de la escuela a mi casa, caminando a 4 km/h me tomaría $x/4$ horas hacer el recorrido. Entonces la hora de entrada la escuela la podemos expresar como

$$\frac{x}{4}-\frac{1}{12}$$

ya que si a la hora en que yo llegué le resto 1/12 de hora (es decir, retrocediendo 5 minutos), obtengo la hora correcta de entrada a la escuela.

Por otro lado, si voy a 5 km/h el tiempo necesario será de $x/5$, y habrá que sumar los 10 minutos para obtener la hora correcta de entrada. Así, la hora de entrada es igual a

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{6}$$

puesto que 10 minutos corresponde a 1/6 de hora.

Por tanto, la hora de llegada se puede expresar de dos maneras diferentes:

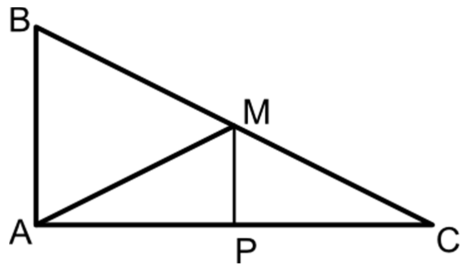
$$\frac{x}{4}-\frac{1}{12}=\frac{x}{4}+\frac{1}{6},$$

ecuación que se puede resolver y encontramos que el resultado es $x = 5$ km.

37. Si el producto de las cifras es 34028, cada dígito debe ser una potencia de 3, es decir, debe ser 1, 3, o 9. Pero 34028=92014, por lo que la única posibilidad es que sean todos ellos 9 (de lo contrario, al multiplicar los 2014 dígitos obtendremos un número menor).

    De esta manera, la suma de las cifras es $2014 \cdot 9 = 18126$.

38. Dibujemos la altura MP como indica la figura siguiente

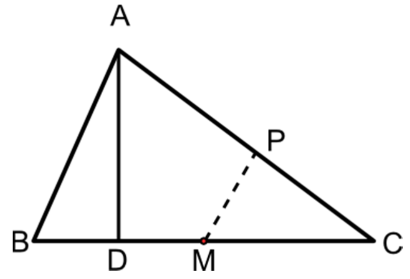


Nota que la línea MP es paralela a a la línea BA (porque ambas pasan son perpendiculares al lado AC) y además, M es el punto medio del lado BC. Una vez más, el teorema de la paralela por punto medio nos asegura que P es el punto medio de AC. En otras palabras, AP = PC.

Pero mira también que como AP=PC, MP=MP y los ángulos APM y MPC son iguales (los dos son rectos), el criterio LAL para congruencia de triángulo nos dice que los triángulos MAP y MCP son iguales (congruentes).

Por tanto, MC = MA y como MC = MB, tenemos que los tres segmentos MA, MB, MC deben ser iguales.

39. Tracemos la línea MP de forma que sea paralela al lado AB, como en la siguiente figura.

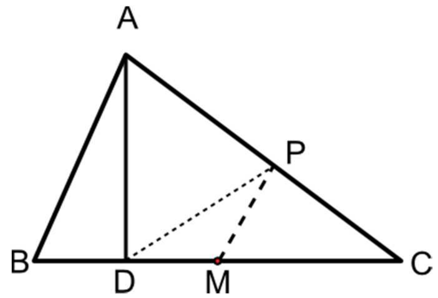


Como M es punto medio del lado BC y MP es paralela al lado AB, se cumplirá que

$$PM = \frac{AB}{2}.$$

Si de alguna forma pudiéramos demostrar que MD = PM, entonces ya habríamos terminado porque al hacer la sustitución obtendríamos que AB es el doble de DM.

Dibujemos la línea PD. Observemos que es la línea que une el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo ACD con el ángulo recto. En el ejercicio anterior vimos que se cumplirá PA = PD = PC.



Pero como PD = PC, el triángulo PDC es isósceles y por tanto el ángulo PDM = ángulo PCM.

Además, como PM es paralela a AB, los ángulos CMP y CBA son iguales (ángulos correspondientes) Pero el ángulo CBA mide el doble del ángulo C (recuerda que el enunciado decía que el ángulo B es el doble del ángulo C). Por tanto:

$$\measuredangle CMP = 2\measuredangle PCM = 2\measuredangle PDM.$$

Finalmente, el ángulo CMP es ángulo exterior del triángulo MDP y por tanto

$$\measuredangle CMP = \measuredangle PDM + \measuredangle DPM.$$

Combinando las dos cadenas de igualdades, tenemos

$$\measuredangle PDM = \measuredangle DPM$$

lo cual significa que el triángulo DPM es isósceles y DM = PM. Pero como AB era el doble de PM, tenemos así que AB es el doble de DM.

40. Dado que $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, los dos primeros términos son $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$, por lo que cada término de la progresión se obtiene sumando $\sqrt{2}$ al anterior.

    Por tanto, el décimo término de la progresión será $9\sqrt{2}$, que, por propiedades de exponentes y radicales, es igual a $\sqrt{9^2 \cdot 2} = 162$.

41. Hasta el día de hoy ha comido 7+8+9+10+⋯+25 que lo podemos calcular observando que

    $$7+8+9+10+\cdots 25=(1+2+3+\cdots+25)-(1+2+3+4+5+6).$$

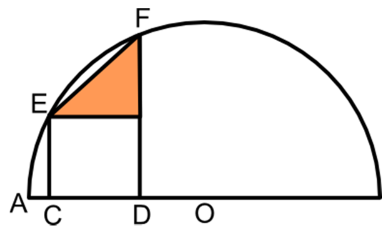
    La última resta es igual a

    $$\frac{25 \cdot 26}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} = 325 - 21 = 304.$$

    Pero como aún quedan 6 chocolates en la caja, originalmente había:

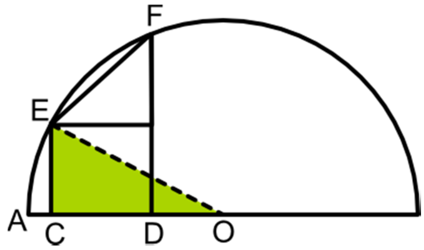
    $$304 + 6 = 310.$$

42. Considera el triángulo sombreado de la figura:



Observa que la medida que buscamos, *EF*, es precisamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Si de alguna forma pudiésemos saber las medidas de ese triángulo, podríamos aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la medida de la hipotenusa.

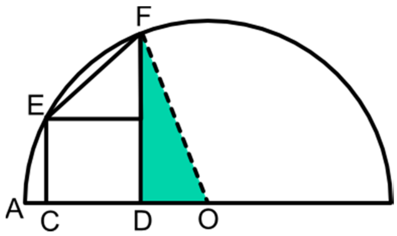
Fíjate ahora que como *AD* mide 8 y *AC* mide 1, la medida de *CD* debe ser 7 y por tanto, la base del triángulo sombreado mide 7. Nos falta encontrar la medida de la altura.



Añadamos ahora la línea EO (estamos llamando O al centro del círculo) y observemos el triángulo que acabamos de sombrear. Su hipotenusa es un radio y por tanto debe medir 13. Su base OC debe medir 12 porque AC = 1. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$OE = \sqrt{OE^2 - OC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

Considera ahora este otro triángulo:



Nuevamente, la hipotenusa es un radio y mide 13. Ya sabíamos que AD mide 8, por lo que DO debe medir 13-8 = 5. Aplicamos una vez más el teorema de Pitágoras:

$$FD = \sqrt{OF^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Pero si FD mide 12 y EC mide 5, entonces la altura del triángulo sombreado en la primera figura debe medir 12-5 = 7. Aplicamos entonces teorema de Pitágoras en la primera figura:

$$EF = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98}.$$

43. Primero observa que el 1 nunca se apunta en la libreta porque en cualquier pareja, el 1 pierde.

    El 2 aparece sólo una vez porque gana en la pareja (1,2) pero pierde en todas las demás.

    El 3 aparece dos veces porque gana en las parejas (1,3) y (2,3) pero pierde en todas las demás.

    El 4 aparece 3 veces porque gana en las parejas (1,4), (2,4) y (3, 4) pero pierde en todas las demás.

    Continuando, vemos que el 5 aparece 4 veces, el 6 aparece 5 veces, el 7 aparece 6 veces, el 8 aparece 7 veces, el 9 aparece 8 veces, el 10 aparece 9 veces.

Entonces, sumamos los números de la libreta:

$$2+3+3+4+4+4+5+5+5+5+\ldots+10+10+10+10+10+10+10+10+10$$

Pero eso es lo mismo que sumar

$$2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 6 + 8\cdot 7 + 9\cdot 8 + 10\cdot 9$$

Y dicha suma es igual a 330.

44. Observemos que el primer número, 1573 es igual a $11^2 \times 13$ y por tanto no es primo. Todos los demás los podemos obtener sumando dos, multiplicando por 100 y sumando 73:

$$(157575\ldots73+2)\cdot 100 + 73 = (157575\ldots73)\cdot 100 + 2\cdot 100 + 73 = (157575\ldots73)\cdot 100+273$$

Pero 273 = 13·21, de manera que si un número de la lista es múltiplo de 13, el siguiente necesariamente lo será. Mas, como ya vimos que el primer número de la lista es múltiplo de 13, todos serán múltiplos de 13 y por tanto ninguno es primo.

45. Primero notamos que A·B·C·D·E·F sólo puede tener dos valores: 1 si hay una cantidad par de vértices que valen -1, y -1 cuando es una cantidad impar. Además, realmente no importa cuáles vértices son iguales a -1, sino cuántos de ellos son iguales a -1.

Con estas observaciones, podemos listar todas las posibilidades para

$$A + B + C + D + E + F + A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E\cdot F:$$

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
- $-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 -1 = 3$
- $-1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (esta es la misma que la anterior)
- $-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = -1$
- $-1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1$ (es la misma que la anterior)
- $-1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 - 1 = -5$
- $- 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 =$ (es la misma que la anterior).

Por tanto hay 4 sumas posibles.

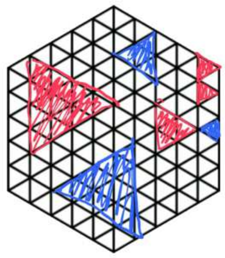
46. Racionalizando cada uno de los términos de la suma, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$
$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4}+\cdots+\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100},$$

Pero cada uno de los denominadores es igual a -1, por lo que la última suma corresponde a calcular:

$$-[(\sqrt{1}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{99}-\sqrt{100})] = -(\sqrt{1}-\sqrt{100})$$
$$= -(1-10) = -(-9) = 9.$$

47. Observemos que hay triángulos de dos tipos, los que apuntan a la derecha y los que apuntan a la izquierda, como se ve en la figura de la derecha.

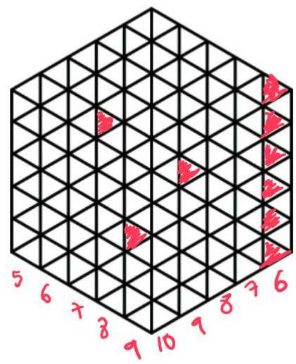


Vamos a contar únicamente los que apuntan a la derecha y luego el resultado final será el doble de dicha cantidad.

Ahora bien, hay varios "tamaños" de triángulos. Vamos a contar cada tamaño por separado.

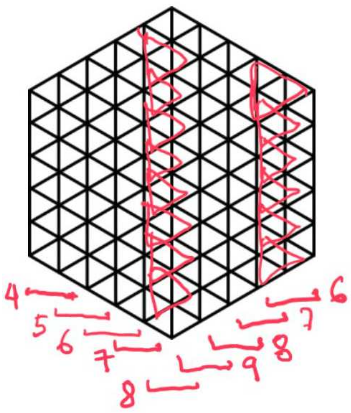
Los triángulos más pequeños posibles son los que tienen lado igual a 1. Como se ve en la figura, hay

(5+6+7+8+9) + (10+9+8+7+6) = 75.



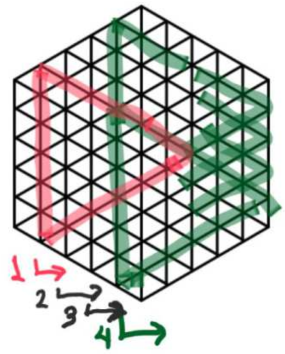
A continuación están los triángulos que tienen lado 2. Como vemos en la figura, hay

(4+5+6+7+8) + (9+8+7+6) = 60.



De manera similar, de lado tres tendremos:

$$(3+4+5+6+7) + (8+7+6) = 46$$



De lado cuatro habrá:

$$(2+3+4+5+6)+(7+6) = 33$$

De lado cinco serán:

$$(1+2+3+4+5)+(6) = 21$$

De lado seis tendremos:

$$(1+2+3+4) = 10$$

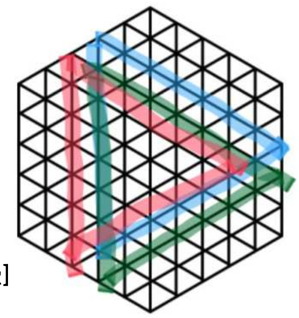
De lado siete habrá:

$$(1+2+3) = 6$$

De lado ocho habrá:

$$(1+2) = 3$$

No es posible tener triángulos de lado mayor que 8.

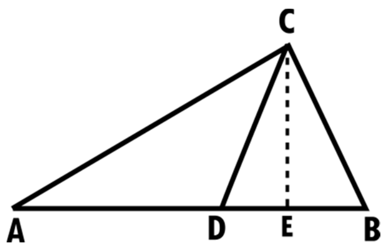


Entonces la cantidad total de triángulos que apuntan a la derecl

$$75 + 60 + 46 + 33 + 21 + 10 + 6 + 3 = 254$$

Y por tanto la cantidad total de triángulos es: $254 + 254 = 508$.

48. Tracemos la perpendicular desde C hasta DB, llamando E al punto de corte, tal como indica la siguiente figura:



Entonces $AD = (AE-DE)$ y $AB = (AE+EB)$. Pero CDB es un triángulo isósceles, de manera que $DE = EB$ y por tanto $AB = AE + DE$.

De esta manera,

$$AD \cdot AB = (AE-DE)\,(AE+DE)$$

que son binomios conjugados y por tanto $AD \cdot AB = AE^2 - DE^2$.

Por otro lado, el teorema de Pitágoras establece que

$$AE^2 = (2^2 - CE^2), \quad DE^2 = (1^2\text{-}CE^2)$$

y por tanto

$$AD\cdot AB = AE^2 - DE^2 = (4 - CE^2) - (1 - CE^2) = 3.$$

49. Dado que hay 7 puntos, el número de formas de elegir tres de ellos es C(7,3)=35. Pero cuando los tres puntos elegidos están alineados, no estamos realmente escogiendo un triángulo.

    Lo anterior sucede cuando escogemos el centro y dos puntos opuestos. Hay tres formas de hacerlo y por tanto, de las 35 formas que habíamos propuesto inicialmente hay que restar estas tres que no son triángulos verdaderos.

    Concluimos entonces que en la figura se pueden formar 35-3 = 32 triángulos.

50. Primero notemos que A y G son distintos de 0 ya que lo contrario "AGUA" y "GOTA" serían números de 3 cifras.

$$\begin{array}{cccc} G & O & T & A \\ G & O & T & A \\ G & O & T & A \\ G & O & T & A \\ G & O & T & A \\ \hline A & G & U & A \end{array}$$

    Si nos fijamos ahora en el dígito de los millares podemos ver que 5G no puede exceder a 10 (pues de lo contrario se llevaría a la siguiente columna y el resultado tendría 5 cifras). En consecuencia, G=1.

    Por otro lado, en la columna de las unidades podemos darnos cuenta que 5A debe terminar en A, por lo que A=0 o A=5, pero como ya descartamos A=0, debe suceder que A=5.

    Como G=1, A=5, para que la columna de la derecha no se altere, no debió llevarse nada de la tercera columna a la cuarta. Esto quiere decir que cinco veces O debe ser menor que 10. Por tanto O podría ser cero o uno, pero como ya no podemos usar el 1, tendremos que O = 0.

    Mas, como en la columna de los centena el resultado es G=1, si O=0, quiere decir que cuando sumamos la columna de las decenas llevamos 1 a la columna de las centenas.

    Finalmente, al analizar la columna de las decenas llegamos a que

$$5T+2 = 10+U$$

    porque de la primera de las unidades se lleva 2 a la de las decenas y la de las decenas lleva 1 a la de las centenas. Eso quiere decir que 5T debe ser mayor que 10 pero menor que 20, dando como dos posibilidades T=2 o T=3.

    Cuando T=2 al sustituir obtenemos U=2 pero sabemos que letras distintas no representan dígitos distintos de manera que debemos descartar esta opción.

    Así, finalmente, T=3 y por tanto (al sustituir) obtenemos U=7. De este modo A+G+U+A=5+1+7+5=18.