ETAPA REGIÓN – Soluciones

Examen de Primaria.

1. César tiene una cartulina rectangular que mide 12 cm de largo y 9 cm de ancho. Si recorta 3 cm en uno de los lados, el área de la cartulina se reduciría en 27 cm². ¿En cuánto se hubiera reducido el área si hubieran recortado los 3 cm en la otra dirección?

Si se recortaron 3 cm y el área disminuyó en 27 cm², es porque se cortaron del lado que mide 9 cm, ya que 27 es el resultado de multiplicar 3 por 9. Entonces, si se hubiera cortado en la otra dirección, el área recortada hubiera resultado de multiplicar 3 por 12 y hubiera disminuido en 36 cm².

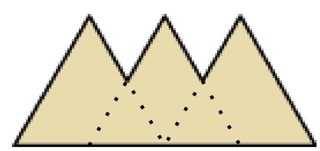
2. Observa que 2025 es un año que es el resultado de multiplicar dos números iguales: 45×45. ¿Cuántos años tienen que pasar para que vuelva a suceder un año que sea el resultado de multiplicar dos números iguales?

Dado que 2025 = 45×45, el siguiente año donde sucederá es 46×46 = 2116, y por tanto habrá que esperar a que pasen 2116 – 2025 = 91 años.

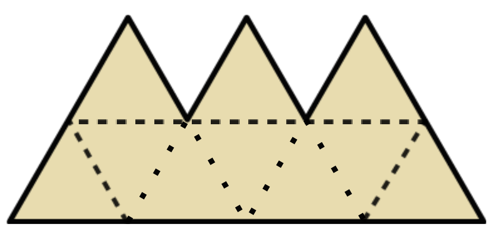
3. En una mesa hay 2025 fichas. Hugo, Paco y Luis empiezan a tomar fichas de la siguiente manera: Primero, Hugo toma 17 fichas. Luego, Paco toma 11 fichas, Luis 11 fichas, Hugo 11 fichas, Paco 11 fichas, Luis 11 fichas, Hugo 11 fichas y así continúan hasta que en cierto momento quedan menos de 11 fichas en la mesa. ¿Cuántas fichas quedan en la mesa al final?

Después de que Hugo toma las 17 fichas iniciales, quedan 2008 fichas. Para saber cuántas fichas quedan al quitarlas de 11 en 11, basta con hacer la división de 2008 entre 11 y fijarnos en el residuo de la división, el cual es igual a 6.

4. Tienes una pieza de cartón cuya forma se obtiene uniendo tres triángulos equiláteros de forma simétrica, como muestra la figura. Si cada uno de los triángulos tiene un área de 60 cm², ¿cuál es el área de toda la pieza de cartón?



En vez de trabajar con complicadas fórmulas, vamos a dividir la pieza de cartón como indica la siguiente figura.



Entonces, observemos que, como cada triángulo grande tiene un área de 60 cm², y está formado por 4 triángulos pequeños, cada triángulo pequeño tiene un área de 15 cm². Como la pieza completa tiene 10 triángulos pequeños, entonces el área total de la pieza de cartón es de 150 cm².

5. El número 12345654321 se ha formado "uniendo" los números del 1 al 6 y luego descendiendo nuevamente hasta 1. Si hicieras el mismo procedimiento, pero con los números del 1 al 100 ¿cuántas cifras tendría el número obtenido?

Aquí la clave será proceder de forma ordenada.

Los números del 1 al 9, todos tienen una cifra, por lo que aquí usamos 9 cifras.
Los números del 10 al 99, todos tienen dos cifras, y hay 90 de ellos, por lo que usan 180 cifras en total.
El número 100 añade 3 cifras más.
Luego, de bajada, del 99 al 10 se usarán nuevamente 180 cifras.
Finalmente, del 9 al 1 se añaden 9 cifras más.
Concluimos entonces, que hay 9+180+3+180+9 = 381 cifras en el número.

6. En inglés, 2 se dice TWO y 4 se dice FOUR. Sin embargo, en la suma que mostramos, cada letra corresponde a una cifra (letras diferentes son cifras diferentes). Si la letra T vale 7, y la letra O es un número par, ¿cuánto vale la letra W?

$$\begin{array}{r} T\ W\ O \\ +\ T\ W\ O \\ \hline F\ O\ U\ R \end{array}$$

El primer razonamiento es que, como la cifra T es 7, la letra F necesariamente debe ser igual a 1, ya que, si sumas dos números de 3 cifras de la forma "setecientos y tanto", el resultado no puede ser 2000 o más grande, por lo que la cifra de los millares en el resultado debe ser F=1.

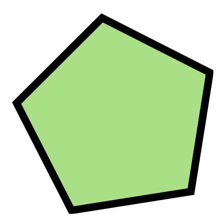
Ahora, tenemos dos opciones para la letra O, podría ser 4 (ya que T+T=7+7=14) o podría ser 5 (en caso de que estemos "llevando 1" de la columna anterior. Pero como el problema nos dice que O representa una cifra par, descartamos el 5 y deducimos que O=4.

Fijándonos en las unidades, como R = O+O, deducimos que R=8. En este momento, con todo lo que hemos razonado, tenemos que la suma se ve como muestra la siguiente imagen.

$$\begin{array}{r} 7\ W\ 4 \\ +\ 7\ W\ 4 \\ \hline 1\ 4\ U\ 8 \end{array}$$

Nos falta deducir el valor de W. No puede ser 1, por que repetiría el valor de F. No puede ser 2, porque entonces U sería 4 y repetiría con O. Si W = 3 tenemos U=6. No puede ser 4 porque repetiría con la O, y no puede ser 5 o más porque si fuera así, en la columna de las centenas "llevaríamos 1" y por tanto no obtendríamos 7+7=14 sino 7+7+1=15. Concluimos entonces que W = 3.

7. Cuando Luci camina, sus pasos miden 40 cm. Cuando Sonia camina, sus pasos miden 60 cm. Si ambas caminan juntas alrededor de un parque que tiene forma de pentágono (como en la figura) y que mide 120 metros en cada lado, ¿Cuántos pasos más dio Luci que Sonia? (Recuerda que en un metro hay 100 cm).



Primero observemos que como el parque tiene 5 lados, y cada uno mide 120 m, para darle la vuelta al parque necesitamos caminar 5×120 = 600 metros. Como en un metro hay 100 cm, eso es 600×100 = 60000 centímetros.

Ahora ya podemos saber cuántos pasos dio cada niña. Como los pasos de Luci miden 40 cm, dividiendo 60000 entre 40, encontramos que dio 1500 pasos. Para Sonia, la división es 60000 entre 60, que da 1000 pasos. Por lo tanto, Luci dio 500 pasos más que Sonia.

8. El número 71235 "contiene" al número 123 porque cuando escribes 71235, forzosamente escribes 1, luego 2 y luego 3. Pero, por ejemplo, ni 81324 ni 67413 "contienen" a 123. ¿Cuántos números de 5 cifras contienen a 123?

Cuando trabajamos problemas de conteo, la mejor guía que podemos darle a los alumnos es que hagan un conteo de forma ordenada. En este caso, hay 3 "tipos de números".

- Los que son de la forma "123 __ __" (donde en los espacios habría otras cifras).
- Los que son de la forma "__ 123__"
- Los que son de la forma "__ __ 123".

Vamos a contarlos por separado.

Los que son de la forma "123 __ __". Podemos poner cualquier cifra en el primer espacio, y cualquier cifra en el segundo, por lo que habrá 10×10 = 100 de estos. Otra manera de convencernos es que son los números que van desde 12300 hasta 12399, de los cuales hay 100.

Los que son de la forma "__ 123 __" los contamos de forma similar, pero observando que en el primer espacio solo hay 9 opciones (no podemos poner el cero) mientras que en las unidades sí tenemos 10 opciones. Por lo tanto, hay 9×10 = 90 de estos números.

Finalmente, los de la forma "__ __ 123" los contamos como en el caso anterior, el primer espacio tiene 9 opciones, mientras que el segundo tiene 10, por lo que habrá 90 de estos números.

Concluimos que la cantidad total será 100 + 90 + 90 = 280.

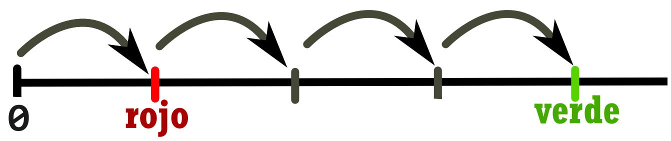
9. Si pienso un número, y luego pienso en su doble y los sumo, y el resultado se pasa de 50 pero no se pasa de 100, ¿cuántos números pude haber pensado al principio?

Notemos que si pensamos en cierto número " ⬤ " , y luego pienso en su doble, " ⬤ + ⬤ ", cuando los sumemos, obtendremos como resultado el triple del número inicial: " ⬤ + ⬤ + ⬤ "

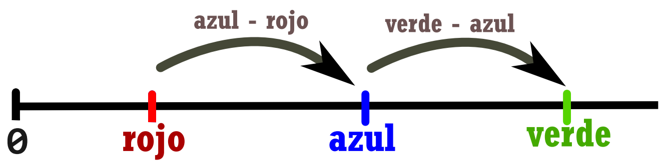
Así, lo que nos están preguntando es cuántos números hay que su triple se pasa de 50 pero no se pasa de 100. El número más chico cuyo triple se pasa de 50 es 17 (porque 3×17=51), y el más grande cuyo triple no se pasa de 100 es 33 (porque 3×33=99). Como hay 17 números comenzando en 17 y terminando en 33, concluimos que la respuesta es 17.

10. Tienes una tarjeta roja, una tarjeta azul y una tarjeta verde. El número rojo es más chico que el número azul. El número azul es más chico que el verde. Si restas azul menos rojo, te da lo mismo que verde menos azul. El número azul es 20. El número verde es 4 veces más grande que el rojo. ¿Cuál es el número rojo?

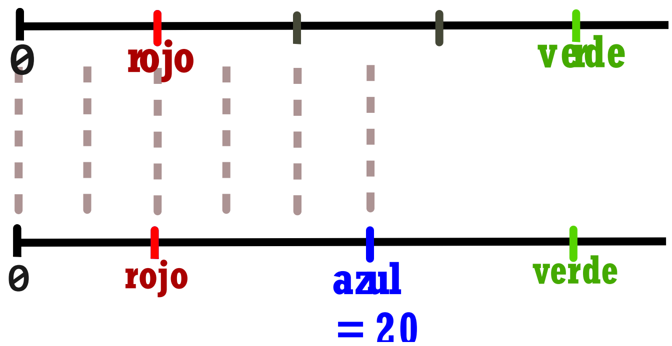
En vez de usar ecuaciones, vamos a hacer un razonamiento visual en una recta numérica. Por ejemplo, sabemos que el número verde es 4 veces el número rojo.



Pero como la resta “azul – rojo” es lo mismo que la resta “verde – azul”, eso quiere decir que el azul está exactamente a la mitad entre el rojo y el verde.



Además, nos dicen que el azul es igual a 20. Si comparamos ambas figuras una junto a otra, deducimos que cada “separación” en la siguiente figura es igual a 4.



Por lo tanto, el número rojo es igual a 8.

<u>**Examen de Secundaria.**</u>

1. Observa que 2025 es un año que es el resultado de multiplicar dos números iguales: 45×45. ¿Cuántos años tienen que pasar para que vuelva a suceder un año que sea el resultado de multiplicar dos números iguales?

Es el mismo que el Problema 2 del examen de primaria. La respuesta es 91.

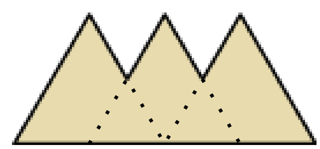
2. En una mesa hay 2025 fichas. Hugo, Paco y Luis empiezan a tomar fichas de la siguiente manera: Primero, Hugo toma 17 fichas. Luego, Paco toma 11 fichas, Luis 11 fichas, Hugo 11 fichas, Paco 11 fichas, Luis 11 fichas, Hugo 11 fichas y así continúan hasta que en cierto momento quedan menos de 11 fichas en la mesa y el último las toma todas. ¿Quién es el último en tomar las fichas?

Después de que Hugo toma las 17 fichas iniciales, quedan 2008 fichas. Para saber cuántos turnos de 11 en 11 se hacen, basta con hacer la división de 2008 entre 11, que da 182 (y sobran 6). Tenemos entonces el siguiente patrón (olvidemos del turno inicial de 17 fichas y nos fijamos en los turnos de 11 fichas).

- Turno 1 = Paco
- Turno 2 = Luis
- **Turno 3 = Hugo**
- Turno 4 = Paco
- Turno 5 = Luis
- **Turno 6 = Hugo**
- Turno 7 = Paco
- Turno 8 = Luis
- **Turno 9 = Hugo**
- Y así sucesivamente.

Notemos que los múltiplos de 3 caen en Hugo. Como 180 es un múltiplo de 3, el turno 180 caerá en Hugo. El turno 181 cae en Paco y el turno 182 cae en Luis. En ese momento quedan 6 fichas en la mesa, y como es el turno de Hugo, las toma todas.

3. Tienes una pieza de cartón cuya forma se obtiene uniendo tres triángulos equiláteros de forma simétrica, como muestra la figura. Si cada uno de los triángulos tiene un área de 60 cm², ¿cuál es el área de toda la pieza de cartón?



Es el mismo que el Problema 4 del examen de primaria. La respuesta es 150 cm².

4. El número 12345654321 se ha formado "pegando" los números del 1 al 6 primero de subida y luego descendiendo nuevamente hasta 1. Si hicieras el mismo procedimiento, pero con los números del 1 al 2025 ¿cuántas cifras tendría el número obtenido?

Aquí la clave será proceder de forma ordenada.

Primero contamos "de subida".
Los números del 1 al 9, todos tienen una cifra, por lo que aquí usamos 9 cifras.
Los números del 10 al 99, todos tienen dos cifras y hay 90 de ellos, por lo que usan 180 cifras en total.
Los números del 100 al 999, todos tienen tres cifras y hay 900 de ellos, por lo que se usan 2700.
Del 1000 al 2025 hay 1026 números de cuatro cifras, añadiendo 4104 cifras más.

Ahora contamos "de bajada".
Del 2024 al 1000 son 1025 números de cuatro cifras, que son 4100 cifras en total.
Los números del 999 al 100 son 2700 cifras, como antes.

Los números del 99 al 10 usan 180 cifras, como antes.
Los números del 9 al 1 usan 9 cifras, como antes.

Entonces el total será: 9 + 180 + 2700 + 4104 + 4100 + 2700 + 180 + 9 = 13982.

5. Tienes tres números enteros y positivos cuya multiplicación es igual a 1230. ¿Cuánto es lo menos que pueden sumar esos 3 números?

La factorización de 1230 es 2×3×5×41, y tenemos que repartir los factores, cuidando que no aparezcan números grandes para que la suma de ellos sea lo más pequeña posible. Por ejemplo, si separamos en tres números, 2×5, 3, 41, la suma obtenida es 10+3+41 = 54.

De entrada, el 41 debe estar solo, por que si lo multiplicáramos por 2 o algo mayor, tendríamos un sumando igual a 82 o mayor, por lo que no obtendríamos una suma más pequeña. Entonces, el 41 debe estar solo. Nos falta repartir 2, 3 y 5.

Si los números son 2×3 y 5, sumarían 11. Si fueran 2×5 y 3, sumarían 13 y si fueran 3×5 y 2, sumarían 17. De este modo, los tres números que tienen la menor suma son 2×3, 5 y 41, dando un resultado de 52.

6. En una caja hay 6 tarjetas numeradas del 1 al 6. ¿Cuántas formas de escoger 3 de ellas cumplen que ningún número escogido es mayor a 4? (No importa el orden en que tomas las tarjetas, solo importa cuáles).

Descartamos las tarjetas con el 5 y el 6, quedándonos solo con las tarjetas 1, 2, 3, 4. Escogiendo tres de ellas, las posibilidades son: 123, 124, 134, 234. Por tanto, la respuesta es 4.

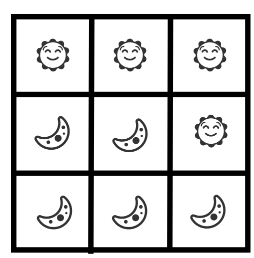
7. Cuando Luci camina, sus pasos miden 40 cm. Cuando Sonia camina, sus pasos miden 60 cm. Si ambas caminan juntas alrededor de un parque que tiene forma de pentágono (como en la figura) y que mide 120 metros en cada lado, ¿Cuántos pasos más dio Luci que Sonia? (Recuerda que en un metro hay 100 cm).

Es el mismo que el problema 7 del examen de primaria. La respuesta es 500.

8. El número 71235 "contiene" al número 123 porque cuando escribes 71235, forzosamente escribes 1, luego 2 y luego 3. Pero, por ejemplo, ni 81324 ni 67413 "contienen" a 123. ¿Cuántos números de 5 cifras contienen a 123?

Es el mismo que el problema 8 del examen de primaria. La respuesta es 280.

9. En un tablero de 3×3 se colocan lunas y soles. En la figura mostramos un ejemplo. Observa que, en el ejemplo, hay 3 soles que quedaron alineados y 3 lunas que quedaron alineadas. ¿Cuántas formas distintas hay de colocar lunas y soles en el tablero para que haya al menos 3 lunas alineadas y al menos 3 soles alineados? (Pueden ser en vertical o en horizontal y puedes usar cualquier cantidad de lunas y soles)



Una primera observación es que, como tiene que haber tanto soles alineados, como lunas alineadas, no pueden estar alineadas en diagonal. Por tanto, solo están alineadas en horizontal o en vertical, y no pueden estar mezclados los tipos.

Vamos a contar las formas de tablero en donde las figuras quedan alineadas en renglones horizontales.
Si leemos las filas de arriba hacia abajo, hay tres tipos de renglones: S (cuando son tres soles), L (cuando son tres lunas) y D (cuando hay de ambos símbolos). Como ejemplo en la figura del problema los renglones son SDL (porque el renglón de arriba son 3 Soles, el renglón de en medio tiene Diferentes y el renglón de abajo tiene 3 Lunas.

Las posibilidades de renglones cuando no hay tipo D son: SSL, SLS, LSS, LLS, LSL, SLL, siendo 6 en este caso.

Ahora, cuando usamos D, las posibilidades son SLD, SDL, LDS, LSD, DSL, DLS. Pero en cada una de esas posibilidades el renglón D tiene a su vez seis posibilidades:

- 🌙🌞🌞,
- 🌞🌙🌞,
- 🌞🌞🌙,
- 🌙🌙🌞,
- 🌙🌞🌙,
- 🌞🌙🌙.

de modo que en realidad hay 36 maneras de llenar el tablero cuando se usa un renglón D, y por tanto hay 6+36=42 formas de llenar el tablero con alineaciones horizontales.

Como también habrá 42 formas de llenar el tablero con alineaciones verticales, el total buscado es 84.

10. Tienes una tarjeta roja, una tarjeta azul y una tarjeta verde. El número rojo es más chico que el número azul. El número azul es más chico que el verde. Si restas azul menos rojo, te da lo mismo que verde menos azul. El número azul es 20. El número verde es 4 veces más grande que el rojo. ¿Cuál es el número rojo?

Este es el mismo que el problema 10 del examen de primaria. La respuesta es 8.